PREVIEW QUESTION BANK(Dual)

Module Name : MATHEMATICAL SCIENCES - 704
Exam Date : 28-Feb-2025 Batch : 09:00-12:00

Sr. No.	Client Question ID	Question Body and Alternatives	Marks	Ne M
Objective Question				
1	1	If a map is placed in such a manner that southwest becomes east, then what will north become? 1. Northeast 2. Southwest 3. Northwest 4. Southeast यदि किसी नक्शे को इस प्रकार से रखा गया है कि दक्षिणपश्चिम की दिशा पूर्व हो जाती है, तो इस दशा में उत्तर दिशा क्या होगी? 1. उत्तरपूर्व 2. दक्षिणपश्चिम 3. उत्तरपश्चिम 4. दक्षिणपूर्व A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4		
Objective Question				
2	2	If water of pH 8 is diluted 100 times with neutral water (pH = 7) then it will 1. become acidic. 2. remain basic. 3. become neutral. 4. become heavy. यदि 8 pH वाले जल को उदासीन जल (pH = 7) के साथ 100 बार डायल्यूट (तनुकृत) किया जाए तो यह 1. अम्लीय बन जाएगा 2. क्षारीय बना रहेगा 3. उदासीन (न्यूट्रल) बन जाएगा 4. भारी जल (हैवी वाटर) बन जाएगा		

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4
Objective Question		
3	3	Fifteen distinct points are randomly placed on the circumference of a circle. How many distinct straight lines at the most can be formed by pairs among these points? 1. 105 2. 455 3. 30 4. 210 एक वृत्त की परिधि पर 15 भिन्न बिंदुओं को यादृच्छिक (रैंडमली) रुप से रखा गया है। इन बिंदुओं में से युग्मों का प्रयोग करके अधिकतम कितनी विभिन्न सीधी रेखाएं बनाई जा सकती हैं? 1. 105 2. 455 3. 30 4. 210 A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4
Objective Question		
4	4	In a population of microbial cells, the initial population is 50, and the growth rate is 0.1 per hour. If the population grows exponentially, what will the approximate size of the population be after 10 hours? 1. 51 2. 82 3. 136 4. 156

सूक्ष्मजीवी कोशिकाओं की एक समष्टि (पॉपुलेशन) में उनकी प्रारंभिक संख्या 50 है तथा उनकी वृद्धिदर 0.1 प्रति घंटा है। यदि उनकी संख्या (पॉपुलेशन) में चरघातांकी (एक्सपोनेंशियली) वृद्धि हो तो 10 घंटे के बाद उनकी समष्टि (पॉपुलेशन) का लगभग आकार क्या होगा ?

1. 51
2. 82
3. 136
4. 156

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

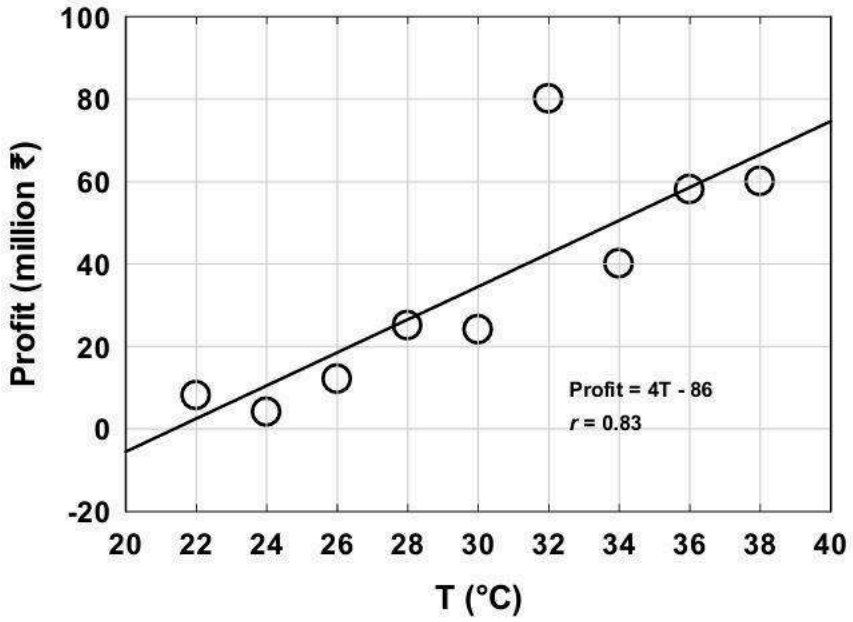
A4 : 4

4

Objective Question

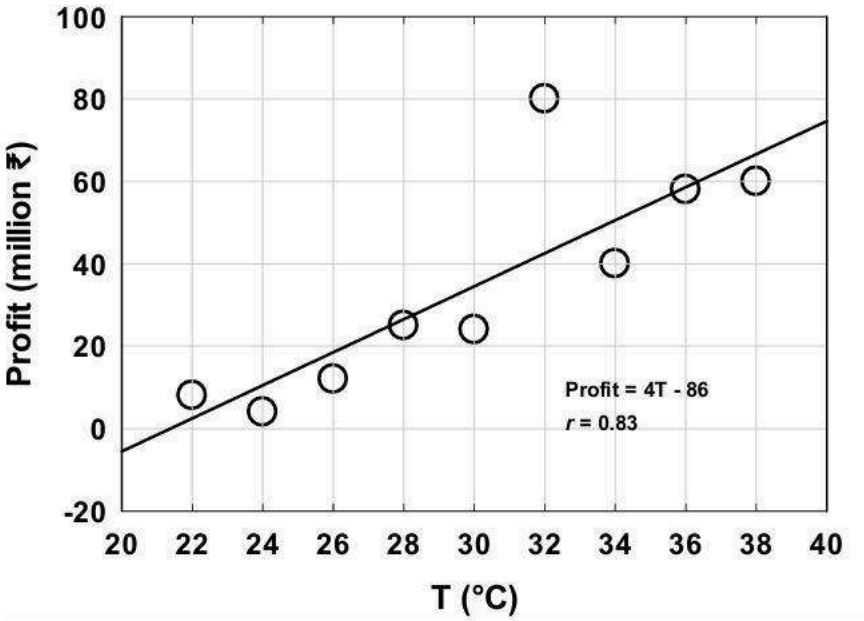
5 5

The given figure shows data points and a line fit by least squares method between profit in ice-cream business and mean temperature (T) for a city. Which one of the following inferences can definitely be drawn? (The correlation coefficient *r* is also given in the figure)



1. The sum of the squared values of differences between the observed and expected values of temperature is the minimum.
2. 83% of the variation in profit is explained by the variation in temperature.
3. Rise in temperature causes profit to increase.
4. At 25°C, estimated profit is 14 million ₹.

नीचे दिए गए चित्र में एक शहर में औसत तापमान (T) तथा आइसक्रीम के व्यवसाय में प्राप्त लाभ (Profit) के आंकड़ों को और उनमें लीस्ट स्क्वायर मैथड (न्यूनतम वर्ग विधि) द्वारा फिट की सरल रेखा को दर्शाया गया है। निम्नलिखित में से किस निष्कर्ष (इंफेरेंस) को निश्चित तौर पर निकाला जा सकता है? (चित्र में सहसंबंध गुणांक (कोरिलेशन कोफिशिएंट) r को भी दिया गया है।



1. तापमान के प्रेक्षित एवं प्रत्याशित मानों (ऑब्जर्व्ड एंड एक्सपेक्टेड वैल्यूज़) के बीच अंतरों के वर्गीकृत मानों का योग न्यूनतम है।
2. प्राप्त लाभ में 83% विचरण तापमान में हुए विचरण से स्पष्ट है।
3. तापमान में वृद्धि होने की वजह से लाभ में वृद्धि होती है।
4. 25°C तापमान पर अनुमानित लाभ ₹14 मिलियन है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

6 6

The average of seven numbers is 71. If we exclude one of these numbers, the average becomes 75. What is that number?

1. 75
2. 74
3. 73
4. 47

सात संख्याओं (नंबर) का औसत 71 है। यदि हम इनमें से एक संख्या को हटा दें तो औसत 75 हो जाता है। वह संख्या क्या है?

1. 75
2. 74
3. 73
4. 47

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

7 7

Choose the option to fill in the blank that will make the following statement logically correct:

THE NUMBER OF OCCURRENCES OF THE LETTER “N” IN THIS SENTENCE IS CORRECTLY COUNTED AS _____ .

1. SIX
2. SEVEN
3. EIGHT
4. NINE

रिक्त स्थान में भरने के लिए वह विकल्प चुनें जो निम्न कथन को तार्किक रूप से सही साबित करता हो:

THE NUMBER OF OCCURRENCES OF THE LETTER “N” IN THIS SENTENCE IS CORRECTLY COUNTED AS _____ .

1. SIX
2. SEVEN
3. EIGHT
4. NINE

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

8 8

In a board meeting of 20 directors, 6 shook everyone else's hands but the remaining 14 did not shake each another's. The total number of handshakes in the meeting was

1. 26
2. 84
3. 99
4. 190

एक बोर्ड की बैठक जिसमें 20 निदेशक उपस्थित थे में 06 ने प्रत्येक अन्य के साथ हाथ मिलाया लेकिन शेष 14 लोगों ने एक दूसरे से हाथ नहीं मिलाया। इस बैठक में हैंडशेक (हाथ मिलाने) की कुल संख्या होगी

1. 26
2. 84
3. 99
4. 190

A1 : 1
1
A2 : 2
2
A3 : 3
3
A4 : 4
4

Objective Question

9 9

Choose the correct chronological order of the following:-
A: match, B: trophy, C: toss, D: result.

1. C, A, D, B
2. A, D, B, C
3. C, B, A, D
4. D, C, B, A

निम्न लिखित शब्दों के सही कालानुक्रम को चुनें -
A: मैच, B: ट्रॉफी, C: टॉस, D: रिजल्ट

1. C, A, D, B
2. A, D, B, C
3. C, B, A, D
4. D, C, B, A

A1 : 1
1
A2 : 2
2
A3 : 3
3
A4 : 4
4

Objective Question

10 10

A spherical ball is placed inside a cubic box. If the diameter of the ball is same as the sides of the box, what approximate percentage of volume will be empty?

1. 12%
2. 24%
3. 36%
4. 48%

एक गोलाकार गेंद को एक घनाकार (क्यूबिक) बॉक्स के अंदर रखा गया। यदि गेंद का व्यास बॉक्स की भुजा के समान हो तो बक्से के ऑयतन (वाल्यूम) का लगभग कितना प्रतिशत भाग खाली रहेगा?

1. 12%
2. 24%
3. 36%
4. 48%

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

11 11

If I walked east 100 metres, turned right and walked 60 metres, turned left and walked 150 metres and turned left again, I would be facing

1. East
2. North
3. West
4. South

यदि मैं पूर्व दिशा में 100 मीटर चलने के पश्चात दाहिने घूम कर 60 मीटर चलूं और फिर बाएं मुड़ कर 150 मीटर की दूरी तय करके फिर से बाएं मुड़ जाऊं तो मेरा मुंह किस दिशा में होगा?

1. पूर्व
2. उत्तर
3. पश्चिम
4. दक्षिण

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

12 12

The words TEST, EXAM and EAST are coded as 1382, 2182 and 1937 but not necessarily in that order. How would the word MATE be coded?

1. 9321
2. 7321
3. 7312
4. 1982

TEST, EXAM तथा EAST को 1382, 2182 एवं 1937 कोड दिया गया है किंतु जरूरी नहीं कि यह उसी क्रम में हो। तो MATE शब्द को कैसे कोडित किया जाएगा?

1. 9321
2. 7321
3. 7312
4. 1982

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

13 13

All those who pass an entrance test take admission into a certain institute. Out of these, some graduate with a degree in 2 years while some fail and are removed, and all graduates from that institute get jobs in the same year. In 2022, no one took admission in that institute. Which of the following does NOT follow necessarily?

1. No one wrote the entrance test in 2022
2. No one passed the entrance test in 2022
3. No one graduated from the institute in 2024
4. No one got a job from the institute in 2024

वे सभी जो प्रवेश परीक्षा में उत्तीर्ण होते हैं एक निश्चित संस्थान में प्रवेश लेते हैं। इनमें से कुछ ने 2 वर्षों में स्नातक की डिग्री प्राप्त की जबकि कुछ अनुत्तीर्ण हुए और उन्हें संस्थान से हटा दिया गया, तथा उस संस्थान से पास होने वाले सभी स्नातकों को उसी वर्ष जॉब (कार्य) मिल गया। वर्ष 2022 में किसी ने भी उस संस्थान में प्रवेश नहीं लिया। निम्नलिखित में से कौन कथन अनिवार्यतः लागू **नहीं** होता?

1. वर्ष 2022 में कोई भी प्रवेश परीक्षा में सम्मिलित नहीं हुआ।
2. वर्ष 2022 में कोई भी प्रवेश परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं हुआ।
3. वर्ष 2024 में इस संस्थान से किसी ने स्नातक नहीं किया।
4. वर्ष 2024 में इस संस्थान से किसी को भी जॉब नहीं मिला।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

14 14

Frank, Sam, Tom and David came first, second, third and fourth in a race but not necessarily in this order. Only one had first letter of position matching that of his name. If Tom came first and Sam did not come second then

1. David came third
2. Frank came fourth
3. David came fourth
4. Sam came fourth

Frank, Sam, Tom एवं David एक दौड़ में First (प्रथम), Second (द्वितीय), Third (तृतीय) तथा Fourth (चौथे) स्थान पर आए किंतु अनिवार्यत: उसी क्रम में नहीं। केवल एक को उसके नाम के प्रथम अक्षर प्रारंभ होने वाला स्थान प्राप्त हुआ । यदि Tom पहले स्थान पर आया ओर Sam द्वितीय स्थान पर नहीं था तो

1. David तीसरे स्थान पर था
2. Frank चौथे स्थान पर था
3. David चौथे स्थान पर था
4. Sam चौथे स्थान पर था

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

15 15

In the fictional country of Numberia, which of the following provinces is the odd one out?

1. SONECON
2. CUGHUSTER
3. FATWOHUM
4. CAFIVENGUS

नम्बेरिया के कल्पनात्मक देश में निम्नलिखित में से कौन सा प्रदेश मेल नहीं खाता (ऑड वन आउट) ।

1. SONECON
2. CUGHUSTER
3. FATWOHUM
4. CAFIVENGUS

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

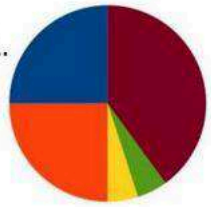
A4 : 4

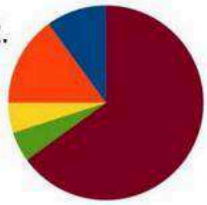
4

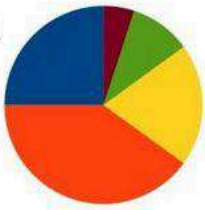
Objective Question

16 16

Which of the following pie-charts depicts the distribution of students in the five subjects such that physics and chemistry get equal number of students, 40% of the total go to the life sciences and remaining are equally divided into maths and earth sciences?

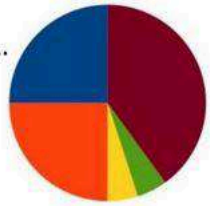
1. 

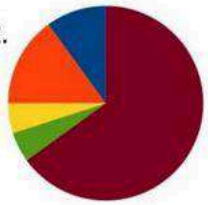
2. 

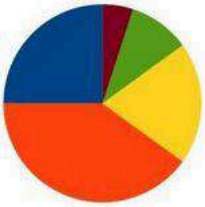
3. 

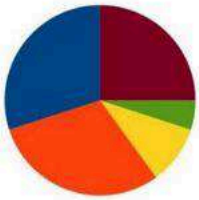
4.

निम्नलिखित में से कौन सा पाई-चार्ट, पॉच अलग-अलग विषयों में छात्रों के इस प्रकार के वितरण (डिस्ट्रीब्यूशन) को दर्शाता है जिसमें भौतिक विज्ञान और रसायन विज्ञान में समान संख्या में छात्र हों, कुल छात्रों का 40 प्रतिशत जीवविज्ञान में दर्शाया गया हो तथा शेष बचे छात्रों को गणित और भूविज्ञान में बराबर बराबर विभाजित किया गया हो?

1. 

2. 

3. 

4. 

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

17 17

How many 4-digit numbers can be generated from the digits 1, 2, 3, 4, 5 such that no digit appears more than once, and digit 1 is always somewhere to the left of the digit 2?

1. 72
2. 36
3. 12
4. 6

अंकों 1, 2, 3, 4, 5 से 4 अंकों (डिजिट) की कितनी संख्याएं सृजित की जा सकती हैं जो इस प्रकार हों कि जिसमें कोई अंक एक बार से अधिक नहीं आए और अंक 1, सदैव अंक 2 के कहीं बांई ओर हो?

1. 72
2. 36
3. 12
4. 6

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

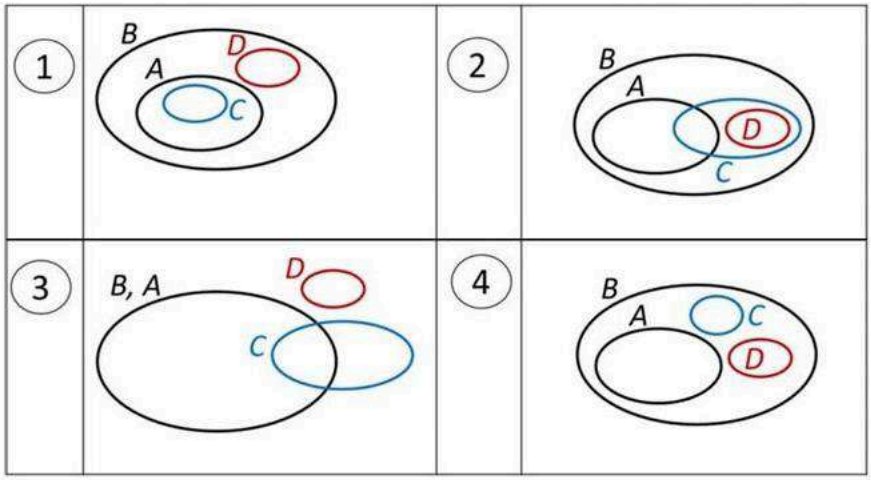
4

Objective Question

18 18

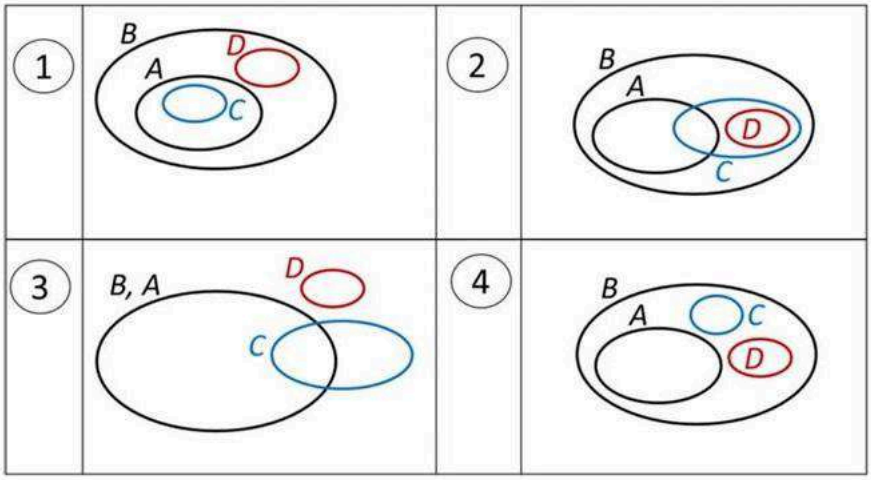
Which one of the following Venn diagrams is NOT consistent with the following statements?

All *A* are *B*
No *D* is *A*
Some *A* are *C*



दिए गए वेन डाइग्राम (Venn diagrams) में से कौन सा निम्नलिखित कथनों के अनुरूप नहीं है?

सभी A, B हैं
कोई D, A नहीं है
कुछ A, C हैं



A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

19 19

A square sheet of 10 cm sides is folded along its diagonal to form an isosceles right triangle, and then hypotenuses are folded successively two times to form isosceles right triangles. What is the length of each equal side after the third folding?

1. 0.625 cm
2. 1.25 cm
3. 2.5 cm
4. 5 cm

10 सेंमी भुजा वाली एक वर्गाकार शीट को इसके तिर्यक (डाइगोनल) की ओर से मोड़कर एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाया गया और उसके बाद लगातार दो बार कर्णों (हाइपोटेन्यूज) को इस प्रकार मोड़ा गया कि समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बन सके। तीसरी बार मोड़ने के बाद प्रत्येक समान भुजा की लंबाई क्या है?

1. 0.625 सेमी
2. 1.25 सेमी
3. 2.5 सेमी
4. 5 सेमी

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

20 20

A water bottle costs ₹ 20 that includes cost of the bottle. If the water costs ₹ 15 more than the bottle, then what is the cost of the bottle?

1. ₹ 2.50
2. ₹ 5
3. ₹ 7.50
4. ₹ 10

एक पानी की बोतल जिसकी लागत ₹ 20 है, में बोतल की लागत भी शामिल है। यदि पानी की लागत बोतल की लागत से ₹ 15 अधिक हो तो बोतल की लागत क्या होगी?

1. ₹ 2.50
2. ₹ 5
3. ₹ 7.50
4. ₹ 10

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Objective Question

21	704101	What is the number of injective functions from $\{1, 2, \ldots, 7\}$ to $\{1, 2, \ldots, 10\}$? 1. 10^7 2. $\frac{10!}{7!}$ 3. $\frac{10!}{3!}$ 4. 7^{10} $\{1, 2, \ldots, 7\}$ से $\{1, 2, \ldots, 10\}$ को एकैकी फलनों की संख्या क्या है? 1. 10^7 2. $\frac{10!}{7!}$ 3. $\frac{10!}{3!}$ 4. 7^{10} A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Objective Question

22	704102	

Let A, B, and C be sets. Which of the following sets is equal to $A \setminus (B \setminus C)$?

1. $A \setminus B$
2. $(A \setminus B) \cup C$
3. $A \setminus (B \cup C)$
4. $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$

मानें कि A, B, तथा C समुच्चय है। निम्न समुच्चयों में से कौन सा $A \setminus (B \setminus C)$ के बराबर है?

1. $A \setminus B$
2. $(A \setminus B) \cup C$
3. $A \setminus (B \cup C)$
4. $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

23 704103

For integers $n \geq 0$, let $f_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ be defined by

$$f_n(x) = \frac{x}{(1-x)^n}.$$

Which of the following statements is true about the series $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$?

1. The series is neither absolutely convergent nor uniformly convergent.
2. The series is both absolutely convergent and uniformly convergent.
3. The series is absolutely convergent but not uniformly convergent.
4. The series is uniformly convergent but not absolutely convergent.

पूर्णांकों $n \geq 0$ के लिए, मानें कि $f_n : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f_n(x) = \frac{x}{(1-x)^n}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ के लिये सत्य है?

1. श्रेणी न तो निरपेक्षत: अभिसारी है और न ही एकसमानत: अभिसारी है।
2. श्रेणी निरपेक्षत: अभिसारी तथा एकसमानत: अभिसारी दोनों है।
3. श्रेणी निरपेक्षत: अभिसारी है परंतु एकसमानत: अभिसारी नहीं।
4. श्रेणी एकसमानत: अभिसारी है परंतु निरपेक्षत: अभिसारी नहीं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

24 704104

Consider the sequences $(a_n)_{n\geq 1}$ and $(b_n)_{n\geq 1}$ defined by

$$a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \text{ and } b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Which of the following statements is true?

1. For each $x \in \mathbb{R}$, there exists an n such that $a_n > x$
2. For each $x \in \mathbb{R}$, there exists an n such that $a_n < x$
3. For each $x \in \mathbb{R}$, there exists an n such that $b_n > x$
4. For each $x \in \mathbb{R}$, there exists an n such that $b_n < x$

अनुक्रमों $(a_n)_{n\geq 1}$ तथा $(b_n)_{n\geq 1}$ पर विचार करें जो निम्न द्वारा परिभाषित हैं

$$a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \text{ तथा } b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए ऐसे किसी n का अस्तित्व है कि $a_n > x$
2. प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए ऐसे किसी n का अस्तित्व है कि $a_n < x$
3. प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए ऐसे किसी n का अस्तित्व है कि $b_n > x$
4. प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए ऐसे किसी n का अस्तित्व है कि $b_n < x$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

25 704105

Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = \sin(x^2)$. Let

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right).$$

Which of the following statements is true?

1. $A = 0$
2. $A = 1$
3. $A = \frac{\sin(1)}{2}$
4. $A = \sin\left(\frac{1}{4}\right)$

एक फलन $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ को $f(x) = \sin(x^2)$ द्वारा परिभाषित कीजिए। मानें कि

$$A = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - n \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right).$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $A = 0$
2. $A = 1$
3. $A = \dfrac{\sin(1)}{2}$
4. $A = \sin\left(\dfrac{1}{4}\right)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

26 704106

Consider the power series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n$$

with coefficients in real numbers $\mathbb{R}$. Which of the following statements is true?

1. The radius of convergence of the series is $\dfrac{1}{e}$
2. The series converges at $x = 5$
3. The series converges at $x = 3$
4. The series converges for all x with $|x| < \dfrac{1}{2}$

वास्तविक संख्याओं $\mathbb{R}$ के गुणांकों वाली घात श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} x^n$$

पर विचार करें। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या $\frac{1}{e}$ है।
2. श्रेणी $x = 5$ पर अभिसरित है।
3. श्रेणी $x = 3$ पर अभिसरित है।
4. श्रेणी उन सभी x के लिए अभिसरित है जिनके लिए $|x| < \frac{1}{2}$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

27 704107

Let U denote the span of $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ in the real vector space of continuous functions from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Consider the $\mathbb{R}$-vector spaces

$$V = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ is an } \mathbb{R}\text{-linear transformation}\}$$
$$W = \{f \in V \mid f(e^{3t}) = 0\}.$$

Which of the following statements is true?

1. Both V and W are infinite-dimensional
2. $\dim V = 3$ and $\dim W = 1$
3. $\dim V = 3$ and $\dim W = 2$
4. V is infinite-dimensional and $\dim W = 0$

$\mathbb{R}$ से $\mathbb{R}$ में परिभाषित सतत फलनों की वास्तविक सदिश समष्टि में $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$ से विस्तरित उपसमष्टि को U से निरूपित कीजिए। निम्न $\mathbb{R}$-सदिश समष्टियों पर विचार करें

$$V = \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ एक } \mathbb{R}\text{-रैखिक रूपांतरण है}\}$$
$$W = \{f \in V \mid f(e^{3t}) = 0\}.$$

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. V तथा W दोनों अनंतविमीय हैं।
2. $\dim V = 3$ तथा $\dim W = 1$
3. $\dim V = 3$ तथा $\dim W = 2$
4. V अनंतविमीय है तथा $\dim W = 0$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

28 704108

Let

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

where a, b, c are real numbers with $abc = 1$. If $B = A + A^2 + A^3$, then which of the following statements is true?

1. $\det B = 1$
2. $\det A = 0$
3. $\text{rank}(B) = 2$
4. $\text{rank}(B^2) = 1$

मानें कि

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएं हैं तथा $abc = 1$ है। यदि $B = A + A^2 + A^3$ है तो निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है

1. $\det B = 1$
2. $\det A = 0$
3. $\operatorname{rank}(B) = 2$
4. $\operatorname{rank}(B^2) = 1$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

29 704109

For a variable x, consider the $\mathbb{R}$-vector space

$$V = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Let $T : V \to V$ be the linear transformation defined by $T(f) = f + \frac{df}{dx}$, where $\frac{df}{dx}$ denotes the derivative of f with respect to x. Which of the following statements is true?

1. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = x$
2. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = x + 1$
3. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = 2025!\, x$
4. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = 2025!\, x + 1$

एक चर x के लिए निम्न $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

पर विचार करें। मानें कि $T : V \to V$ एक रैखिक रूपांतरण है जो $T(f) = f + \frac{df}{dx}$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $\frac{df}{dx}$ चर x के सापेक्ष f के अवकलज को निरूपित करता है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = x$
2. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = x + 1$
3. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = 2025!\, x$
4. $(T^3 - 3T^2 + 3T)^{2025}(x) = 2025!\, x + 1$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

30 704110

Let V be the $\mathbb{R}$-vector space of 5×5 real matrices. Let $S = \{AB - BA \mid A, B \in V\}$ and W denote the subspace of V spanned by S. Let $T : V \to \mathbb{R}$ be the linear transformation mapping a matrix A to its trace. Which of the following statements is true?

1. $W = \ker(T)$
2. $W \subsetneq \ker(T)$
3. $W \cap \ker(T) \subsetneq W$
4. $W \cap \ker(T) \subsetneq \ker(T)$

मानें कि 5×5 वास्तविक आव्यूहों का $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि V है। मानें कि $S = \{AB - BA \mid A, B \in V\}$, तथा S द्वारा विस्तरित V की उपसमष्टि को W से निरुपित करें। मानें कि रैखिक रूपांतरण $T : V \to \mathbb{R}$ एक आव्यूह A को उसके अनुरेखण में प्रतिचित्रित करता है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $W = \ker(T)$
2. $W \subsetneq \ker(T)$
3. $W \cap \ker(T) \subsetneq W$
4. $W \cap \ker(T) \subsetneq \ker(T)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

31 704111

Let $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ be a nonzero vector that lies in the orthogonal complement (with respect to the standard inner product) of the row-space of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

If a, b, c are all integers, then what is the smallest possible value of $|a + b + c|$?

1. 5
2. 10
3. 15
4. 20

मानें कि $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ एक शून्येतर सदिश है जो आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

के पंक्ति समष्टि के लांबिक पूरक (मानक आंतर गुणनफल के संदर्भ में) में निहित है। यदि सभी a, b, c पूर्णांक हैं, तब $|a + b + c|$ का लघुत्तम संभव मान क्या है?

1. 5
2. 10
3. 15
4. 20

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

32 704112

Consider the bilinear form $B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ defined by

$$B(x, y) = x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2,$$

where $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ and $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ in $\mathbb{R}^4$. Let A denote the matrix of B with respect to the standard ordered basis of $\mathbb{R}^4$. Which of the following statements is true?

1. $\det A = 0$
2. $\det A = -1$
3. $B(x, x) \neq 0$ for all nonzero $x \in \mathbb{R}^4$.
4. If $x \in \mathbb{R}^4$ is nonzero, then there exists $y \in \mathbb{R}^4$ such that $B(x, y) \neq 0$.

एक द्विएकघाती समघात $B : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, जो कि निम्न द्वारा परिभाषित है, पर विचार करें।

$$B(x, y) = x_1y_3 + x_2y_4 - x_3y_1 - x_4y_2,$$

जहाँ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ है। माने कि $\mathbb{R}^4$ के मानक क्रमित आधार के संदर्भ में B के आव्यूह को A निरूपित करता है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\det A = 0$
2. $\det A = -1$
3. सभी शून्येतर $x \in \mathbb{R}^4$ के लिए $B(x, x) \neq 0$ है।
4. यदि $x \in \mathbb{R}^4$ शून्येतर है, तब $y \in \mathbb{R}^4$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $B(x, y) \neq 0$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

33 704113

Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be the function defined by

$$f(z) = e^{(\cos(1+i)) \sin z}.$$

For $z = x + iy \in \mathbb{C}$, write $f(z)$ as $u(x, y) + iv(x, y)$, where u, v are real-valued functions. Which of the following is the value of $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$?

1. 0
2. $\left(e + \dfrac{1}{e}\right) \dfrac{\cos 1}{2}$
3. $\left(e - \dfrac{1}{e}\right) \dfrac{\cos 1}{2}$
4. 1

एक फलन $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(z) = e^{(\cos(1+i))\sin z}.$$

सभी $z = x + iy \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z)$ को $u(x, y) + iv(x, y)$ के रूप मे लिखे, जहाँ u, v वास्तविक मान फलन हैं। निम्न में से कौन सा $\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)$ मान है?

1. 0
2. $\left(e + \frac{1}{e}\right)\frac{\cos 1}{2}$
3. $\left(e - \frac{1}{e}\right)\frac{\cos 1}{2}$
4. 1

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

34 704114

Let $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ and $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ be a non-constant holomorphic function satisfying $|f(z)| < 1$ for all $z \in \mathbb{H}$. Which of the following statements is true?

1. $\lim_{y \to +\infty} f'(iy) = 0$
2. $\lim_{y \to +\infty} f'(iy)$ is a complex number with absolute value 1.
3. $\lim_{y \to +\infty} |f'(iy)| = +\infty$
4. $\lim_{y \to +\infty} f'(iy)$ is not a real number.

मानें कि $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ है तथा $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ एक अचरेतर होलोमार्फिक फलन है जो सभी $z \in \mathbb{H}$ के लिए $|f(z)| < 1$ को संतुष्ट करता है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\lim_{y \to +\infty} f'(iy) = 0$
2. $\lim_{y \to +\infty} f'(iy)$ निरपेक्ष मान 1 की एक सम्मिश्र संख्या है।
3. $\lim_{y \to +\infty} |f'(iy)| = +\infty$
4. $\lim_{y \to +\infty} f'(iy)$ एक वास्तविक संख्या नहीं है।

A1 : 1

1

		A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Objective Question

35	704115	For integers $m, n \geq 1$, let $$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^m \, \overline{z}^n dz,$$ where C is the circle $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z \rvert = 1\}$ oriented counterclockwise. Which of the following statements is true? 1. $I_{m,n} = 1$ if $m = n$ 2. $I_{m,n} = 1$ if $m + 1 = n$ 3. $I_{m,n} = 1$ if $m = n + 1$ 4. $I_{m,n} = 1$ if $m = n + 2$ पूर्णांकों $m, n \geq 1$ के लिए, मानें कि $$I_{m,n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^m \, \overline{z}^n dz,$$ जहाँ C वामावर्तीय अभिविन्यस्त वृत्त $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z \rvert = 1\}$ है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है? 1. $I_{m,n} = 1$ यदि $m = n$ 2. $I_{m,n} = 1$ यदि $m + 1 = n$ 3. $I_{m,n} = 1$ यदि $m = n + 1$ 4. $I_{m,n} = 1$ यदि $m = n + 2$ A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Objective Question

36	704116	

Let $\mathbb{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ be the open unit disc and $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ a holomorphic function such that $f(0) = 0$. Let $\psi(z) = |f(z)|^2$, and

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \equiv 0.$$

Which of the following statements is **FALSE**?

1. f can be extended to $\mathbb{C}$ as an entire function.
2. f must have infinitely many zeros in $\mathbb{D}$.
3. f is not a polynomial.
4. $\exp(f)$ cannot take every complex value.

मानें कि $\mathbb{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ विवृत एकक चक्रिका तथा $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ एक ऐसा होलोमार्फिक फलन है जो $f(0) = 0$ संतुष्ट करता है। मानें कि $\psi(z) = |f(z)|^2$, तथा

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \equiv 0.$$

निम्न कथनों में से कौन सा **असत्य** है?

1. f को सर्वत्र वैश्लेषिक फलन के रूप में $\mathbb{C}$ पर विस्तारित किया जा सकता है।
2. $\mathbb{D}$ में f के अनंत शून्य होने आवश्यक हैं।
3. f एक बहुपद नहीं है।
4. $\exp(f)$ प्रत्येक सम्मिश्र मान नहीं ले सकता।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

37 704117

For integers $n > 1$, let $G(n)$ denote the number of groups of order n, up to isomorphism, i.e. $G(n)$ is the number of isomorphism classes of groups of order n. Which of the following statements is true?

1. If $G(n) = 1$, then n is prime.
2. $G(8) = 2$
3. If $\gcd\big(n, \varphi(n)\big) > 1$, then $G(n) > 1$. (Here φ denotes the Euler φ-function.)
4. $\limsup_{n \to \infty} G(n) = 2$

पूर्णांकों $n > 1$ के लिए मानें कि $G(n)$ तुल्याकारिता तक कोटि n के समूहों की संख्या को निरूपित करता है। अत: $G(n)$ कोटि n के समूहों की तुल्याकारी कक्षाओं की संख्या है। निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है ?

1. यदि $G(n) = 1$ है, तब n अभाज्य है।
2. $G(8) = 2$
3. यदि $\gcd\left(n, \varphi(n)\right) > 1$ है, तब $G(n) > 1$. (यहाँ φ ऑयलर φ-फलन को निरूपित करता है।)
4. $\limsup_{n\to\infty} G(n) = 2$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

38 704118

We say that a group G has property (A) if every non-trivial homomorphism from G to any group is injective. Which of the following groups has property (A)?

1. The cyclic group of order 6.
2. The symmetric group S_5.
3. The alternating group A_5.
4. The dihedral group with ten elements.

हम कहेंगे कि एक समूह G, गुण (A) का पालन करता है यदि G से किसी भी समूह को प्रत्येक अतुच्छ समाकारिता एकैकी है? निम्न में से कौन सा समूह गुण (A) का पालन करता है?

1. कोटि 6 का चक्रीय समूह
2. सममित समूह S_5
3. एकांतर समूह A_5
4. दस अवयवों वाला द्वितल समूह

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

39 704119

Let $\mathbb{C}[x, y]$ be the polynomial ring in two variables over $\mathbb{C}$. For which of the following ideals I, the quotient ring $\mathbb{C}[x, y]/I$ is **NOT** an integral domain?

1. $I = (x, y)$
2. $I = (x + y)$
3. $I = (x^2 + y^2)$
4. $I = (xy - 1)$

मानें कि $\mathbb{C}[x, y]$ दो चरों में $\mathbb{C}$ पर बहुपद वलय है। निम्न में से कौन सी गुणजावली I के लिए, विभाग वलय $\mathbb{C}[x, y]/I$ पूर्णांकीय प्रांत **नहीं** है?

1. $I = (x, y)$
2. $I = (x + y)$
3. $I = (x^2 + y^2)$
4. $I = (xy - 1)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

40 704120

Which of the following statements is true ?

1. $\{m + ne^{\frac{2\pi i}{3}} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ is a dense subset of $\mathbb{C}$.
2. Open connected subsets of $\mathbb{R}^3$ need not be path-connected.
3. Let X be a topological space and $p : X \to \mathbb{R}$ a continuous surjective open map. If $p^{-1}(\{\alpha\})$ is connected for every $\alpha \in \mathbb{R}$, then X must be connected.
4. Compact subsets of any infinite topological space are closed.

निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\mathbb{C}$ का $\{m + ne^{\frac{2\pi i}{3}} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ एक सघन उपसमुच्चय है।
2. $\mathbb{R}^3$ के विवृत संबद्ध उपसमुच्चयों को पथ-संबद्ध होना आवश्यक नहीं है।
3. यदि X एक सांस्थितिकीय समष्टि है तथा $p : X \to \mathbb{R}$ ऐसा सतत आच्छादी विवृत प्रतिचित्र है कि प्रत्येक $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए $p^{-1}(\{\alpha\})$ संबद्ध है, तब X का संबद्ध होना आवश्यक है।
4. किसी भी अनंत सांस्थितिकीय समष्टि के संहत उपसमुच्चय संवृत होते हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

41 704121

Suppose that the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

transforms into a second order differential equation with constant coefficients under the change of independent variable given by $s = s(x)$ satisfying $\frac{ds}{dx}(0) = 1$. Then which of the following statements is true?

1. $e^{-x}\left(P(x) + 1\right)$ is a constant function on $\mathbb{R}$
2. $e^{-2x}P(x)$ is a constant function on $\mathbb{R}$
3. $s(x) = \frac{e^{2x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$
4. $P(x) \to 1$ as $x \to \infty$

मानें कि अवकल समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

स्वतंत्र चर के बदलाव $s = s(x)$, जबकि $\frac{ds}{dx}(0) = 1$ है, के अधीन अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि के एक अवकल समीकरण में रूपांतरित होता है। तब निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $\mathbb{R}$ पर $e^{-x}\left(P(x) + 1\right)$ एक अचर फलन है।
2. $\mathbb{R}$ पर $e^{-2x}P(x)$ एक अचर फलन है।
3. $s(x) = \frac{e^{2x}}{2},\ x \in \mathbb{R}$
4. $P(x) \to 1$ जब $x \to \infty$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

42 704122

Given that $y_1(x) = e^{2x}$ is a solution of the ordinary differential equation (ODE)

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (3+4x)\frac{dy}{dx} + (4x+6)y = 0,\ x > 0.$$

Let $y_2 = y_2(x)$ be the solution of the ODE satisfying the conditions $y_2(1) = \frac{e^2}{4}$, $\frac{dy_2}{dx}(1) = \frac{3e^2}{2}$.
Then which of the following statements is true?

1. y_2 is a strictly increasing function on $(0, \infty)$
2. $e^{-2x}y_2(x) \to 1$ as $x \to \infty$
3. y_2 is a strictly decreasing function on $(0, \infty)$
4. $e^{-2x}y_2(x) \to 0$ as $x \to \infty$

दिया गया है कि $y_1(x) = e^{2x}$ निम्न साधारण अवकल समीकरण (ODE) का हल है।

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (3+4x)\frac{dy}{dx} + (4x+6)y = 0,\ x > 0.$$

मानें कि ODE का हल $y_2 = y_2(x)$ है जो प्रतिबंधों $y_2(1) = \frac{e^2}{4}$, $\frac{dy_2}{dx}(1) = \frac{3e^2}{2}$ को संतुष्ट करता है। तब निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $(0, \infty)$ पर y_2 दृढ़तः वर्धमान फलन है
2. $e^{-2x}y_2(x) \to 1$ जब $x \to \infty$
3. $(0, \infty)$ पर y_2 दृढ़तः वर्धमान फलन है
4. $e^{-2x}y_2(x) \to 0$ जब $x \to \infty$

A1 : 1
1
A2 : 2
2
A3 : 3
3
A4 : 4
4

Objective Question

43 704123

Let $u = u(x, y)$ be the solution of the Cauchy problem

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,\ (x, y) \neq (0, 0),$$
$$u(x, 1) = \sqrt{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Then which of the following statements is true?

1. $u(1, 0) = 0$
2. $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$ whenever $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$
3. $u(1, y) = \sqrt{2}$ for all $y \in \mathbb{R}$
4. $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$ whenever $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

मानें कि $u = u(x, y)$ निम्न कॉशी समस्या का हल है

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u,\ (x, y) \neq (0, 0),$$
$$u(x, 1) = \sqrt{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

तब निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $u(1, 0) = 0$
2. $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$, जब भी $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ है।
3. सभी $y \in \mathbb{R}$ के लिए $u(1, y) = \sqrt{2}$
4. $u(x_1, y_1) = u(x_2, y_2)$ जब भी $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

44 704124

Let $u = u(x,t)$ be a solution of the wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

satisfying the condition $u(0,t) = 0,\ \forall t \geq 0$. Then which of the following statements is true?

1. $u(x,t) = 0$, whenever $x = t$
2. $u(x,t) = 0$, whenever $x = -t$
3. $u(-x,t) = u(x,t)$, whenever $x > 0,\ t > 0$
4. $u(-x,t) = -u(x,t)$, whenever $0 < x \leq t$

मानें कि $u = u(x,t)$ तरंग-समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

का हल है जो प्रतिबंध $u(0,t) = 0,\ \forall t \geq 0$ को संतुष्ट करता है। तब निम्न कथनों में से कौन सा सत्य है?

1. $u(x,t) = 0$, जब भी $x = t$
2. $u(x,t) = 0$, जब भी $x = -t$
3. $u(-x,t) = u(x,t)$, जब भी $x > 0,\ t > 0$
4. $u(-x,t) = -u(x,t)$, जब भी $0 < x \leq t$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

45 704125

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be such that $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = L$, where $1 < L < \infty$. Let $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function satisfying $|h'(x)| \leq \frac{3}{4}$ for all $x \in \mathbb{R}$. For $\alpha > 0$, define $g(x) = \alpha f(x) + h(x)$ for $x \in \mathbb{R}$. Consider the sequence $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ defined by

$$x_{k+1} = g(x_k),\ k = 0, 1, \ldots,$$

where $x_0 \in \mathbb{R}$. The sequence $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ converges to the solution of the equation $x = g(x)$ if

1. $\alpha < \frac{2}{3L}$
2. $\alpha < \frac{3}{2L}$
3. $\alpha < 4L$
4. $\alpha < \frac{1}{4L}$

एक फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ के लिए $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = L$ है , जहाँ $1 < L < \infty$ है। ऐसा अवकलनीय फलन $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ लीजिए जो कि $|h'(x)| \leq \frac{3}{4}$ को संतुष्ट करता हो। प्रत्येक $\alpha > 0$ के लिए परिभाषित करें: $g(x) = \alpha f(x) + h(x)$, जबकि $x \in \mathbb{R}$ है। निम्न अनुक्रम $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ पर विचार करें

$$x_{k+1} = g(x_k),\ k = 0, 1, \ldots,$$

जहाँ $x_0 \in \mathbb{R}$ है। अनुक्रम $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ समीकरण $x = g(x)$ के हल पर अभिसरित होता है यदि

1. $\alpha < \frac{2}{3L}$
2. $\alpha < \frac{3}{2L}$
3. $\alpha < 4L$
4. $\alpha < \frac{1}{4L}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

46 704126

Let S denote the set of all solutions of the Euler-Lagrange equation of the variational problem:

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + (y')^2\right) dx,$$

$$\text{subject to } y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ \int_0^1 y^2\, dx = 1.$$

Then the set $\left\{\varphi\left(\frac{1}{2}\right) : \varphi \in S\right\}$ is equal to

1. $\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$
2. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{k} : k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\right\}$
3. $\left\{\sqrt{\frac{2}{k}} : k \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\}$

मानें कि S निम्न विचरण समस्या

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left(y^2 + (y')^2\right) dx,$$

$$\text{सप्रतिबंध } y(0) = 0,\ y(1) = 0,\ \int_0^1 y^2\, dx = 1$$

के ऑयलर-लग्रांज समीकरण के सभी समाधानों के समुच्चय को निरूपित करता है। तब समुच्चय $\left\{\varphi\left(\frac{1}{2}\right) : \varphi \in S\right\}$ निम्न के बराबर है

1. $\{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$
2. $\left\{\frac{\sqrt{2}}{k} : k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\right\}$
3. $\left\{\sqrt{\frac{2}{k}} : k \in \mathbb{N}\right\}$
4. $\{-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

47 704127

Let $\lambda \in \mathbb{R}$, and $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ be a function such that every solution of the boundary value problem

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \lambda u(x) = 0; \;\; \frac{du}{dx}(0) = u(0), \;\; \frac{du}{dx}(1) = 0$$

satisfies the integral equation

$$u(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt = 0.$$

Then

1. $K(x,t) = \begin{cases} (1+x)(1-t), & 0 \le x \le t \le 1, \\ (1+t)(1-x), & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$
2. $K(x,t) = \begin{cases} -1-x, & 0 \le x \le t \le 1, \\ -1-t, & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$
3. $K(x,t) = \begin{cases} 1-x^2, & 0 \le x \le t \le 1, \\ 1-t^2, & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$
4. $K(x,t) = \begin{cases} (1+x)(t-1), & 0 \le x \le t \le 1, \\ (1+t)(x-1), & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$

मानें कि $\lambda \in \mathbb{R}$, तथा $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ इस प्रकार का फलन है कि परिसीमा मान समस्या

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) + \lambda u(x) = 0; \;\; \frac{du}{dx}(0) = u(0), \;\; \frac{du}{dx}(1) = 0$$

का प्रत्येक हल समाकल समीकरण

$$u(x) + \lambda \int_0^1 K(x,t)u(t)dt = 0$$

को संतुष्ट करता है। तब

1. $K(x,t) = \begin{cases} (1+x)(1-t), & 0 \le x \le t \le 1, \\ (1+t)(1-x), & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$
2. $K(x,t) = \begin{cases} -1-x, & 0 \le x \le t \le 1, \\ -1-t, & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$
3. $K(x,t) = \begin{cases} 1-x^2, & 0 \le x \le t \le 1, \\ 1-t^2, & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$
4. $K(x,t) = \begin{cases} (1+x)(t-1), & 0 \le x \le t \le 1, \\ (1+t)(x-1), & 0 \le t < x \le 1 \end{cases}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

48 704128

Two blocks of equal mass m are connected by a flexible inelastic cord of mass M. One block is placed on a smooth horizontal table, the other block hangs over the edge. The total potential energy of the entire cord is given by $\frac{-Mg}{2l}x^2$, where x is the distance of the hanging block from the edge of the table, l is the length of the cord, and g is the gravitational acceleration.
Then

1. $\ddot{x} = \frac{l}{g}\frac{ml+Mx}{2m+M}$
2. $\ddot{x} = \frac{l}{g}\frac{Ml+mx}{m+M}$
3. $\ddot{x} = \frac{g}{l}\frac{ml+Mx}{m+M}$
4. $\ddot{x} = \frac{g}{l}\frac{ml+Mx}{2m+M}$

समान द्रव्यमान m के दो ब्लॉक द्रव्यमान M की एक सुनम्य अप्रत्यास्थ तार-डोरी से जुड़े हैं। एक ब्लॉक को मसृण (चिकने) क्षैतिज मेज पर रखा गया है तथा दूसरा ब्लॉक किनारे से लटक रहा है। संपूर्ण तार-डोरी की कुल स्थितिज ऊर्जा $\frac{-Mg}{2l}x^2$ द्वारा दी गई है, जहाँ x लटके हुए खण्ड की मेज के कोने से दूरी है, l तार-डोरी की लंबाई तथा g गुरूत्वीय त्वरण है। तब

1. $\ddot{x} = \frac{l}{g}\frac{ml+Mx}{2m+M}$
2. $\ddot{x} = \frac{l}{g}\frac{Ml+mx}{m+M}$
3. $\ddot{x} = \frac{g}{l}\frac{ml+Mx}{m+M}$
4. $\ddot{x} = \frac{g}{l}\frac{ml+Mx}{2m+M}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

49 704129

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}dx_1\ldots dx_n$$

equals

1. 1
2. $\frac{1}{2}$
3. 2
4. $\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{x_1+\cdots+x_n}dx_1\ldots dx_n$$

निम्न के बराबर है

1. 1
2. $\frac{1}{2}$
3. 2
4. $\frac{2}{3}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

50 704130

Let $U_1, U_2, \ldots, U_5$ be 5 urns such that urn U_k contains $2k + k^2$ balls, out of which $2k$ are white balls and k^2 are black balls, $k = 1, 2, \ldots, 5$. An urn is selected with probability of selecting urn U_k being proportional to $(k+2)$. A ball is chosen randomly from the selected urn. Then, the probability that the urn U_5 was selected, given that the ball drawn is white, is equal to

1. $\frac{3}{5}$
2. $\frac{2}{5}$
3. $\frac{1}{5}$
4. $\frac{3}{4}$

मानें कि $U_1, U_2, \ldots, U_5$, ऐसे पाँच कलश है, कि $k = 1, 2, \ldots, 5$ के लिए, कलश U_k में $2k + k^2$ गेंदें हैं जिनमें से $2k$ सफ़ेद गेंदें है तथा k^2 काली गेंदें हैं। किसी एक कलश को इस प्रकार चुना जाता है कि कलश U_k के चुने जाने की प्रायिकता $(k + 2)$ के समानुपाती हो। चयनित कलश में से एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। यदि ज्ञात है कि निकाली गेंद सफ़ेद है तो चयनित कलश U_5 के होने की प्रायिकता निम्न के बराबर है

1. $\frac{3}{5}$
2. $\frac{2}{5}$
3. $\frac{1}{5}$
4. $\frac{3}{4}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

51 704131

In an examination question paper, all questions are 'True' or 'False' type. These are arranged in such a way that three-fourth of times a question with answer 'True' is followed by a question with answer 'True'. Also two-third of times a question with answer 'False' is followed by a question with answer 'False'. If the question paper has 100 questions, the approximate probability that the correct answer of the 100-th question is 'True', is

1. $\frac{3}{7}$
2. $\frac{4}{7}$
3. $\frac{3}{4}$
4. $\frac{5}{6}$

एक परीक्षा प्रश्न पत्र में, सभी प्रश्न 'सत्य' या 'असत्य' प्रकार के हैं। ये प्रश्न इस प्रकार से व्यवस्थित हैं कि किसी प्रश्न का उत्तर 'सत्य' है तो तीन-चौथाई बार इसके अगले प्रश्न का भी उत्तर 'सत्य' होता है। इसी प्रकार किसी प्रश्न का उत्तर 'असत्य' है तो दो-तिहाई बार उसके अगले प्रश्न का उत्तर भी 'असत्य' होता है। यदि प्रश्न पत्र में 100 प्रश्न हैं तो 100वें प्रश्न का सही उत्तर 'सत्य' होने की सन्निकट प्रायिकता है

1. $\frac{3}{7}$
2. $\frac{4}{7}$
3. $\frac{3}{4}$
4. $\frac{5}{6}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

52 704132

Suppose that $X \sim \text{binomial}(9, \theta),\ 0.7 < \theta < 1$, and $Y \sim \text{Poisson}(\lambda),\ \lambda > 0$. If $3E(Y) = E(X)$, then which of the following is true?

1. $\text{Var}(X) > 3\text{Var}(Y)$
2. $2\text{Var}(Y) < \text{Var}(X) < 3\text{Var}(Y)$
3. $\text{Var}(Y) < \text{Var}(X) < 2\text{Var}(Y)$
4. $\text{Var}(X) < \text{Var}(Y)$

मानें कि $X \sim \text{binomial}(9, \theta),\ 0.7 < \theta < 1$, तथा $Y \sim \text{Poisson}\ (\lambda),\ \lambda > 0$ है। यदि $3E(Y) = E(X)$ है, तब निम्न में कौन सा सत्य है

1. $\text{Var}(X) > 3\text{Var}(Y)$
2. $2\text{Var}(Y) < \text{Var}(X) < 3\text{Var}(Y)$
3. $\text{Var}(Y) < \text{Var}(X) < 2\text{Var}(Y)$
4. $\text{Var}(X) < \text{Var}(Y)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

53 704133

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n\ (n \geq 2)$ be a random sample from a gamma distribution with shape parameter $\alpha > 0$ and scale parameter $\beta = 1$. For a suitable constant C, the rejection region of the most powerful test for testing $H_0 : \alpha = 1$ against $H_1 : \alpha = 2$ is of the form

1. $\prod_{i=1}^{n} X_i > C$
2. $\sum_{i=1}^{n} X_i > C$
3. $\prod_{i=1}^{n} X_i < C$
4. $\sum_{i=1}^{n} X_i < C$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ गामा-बंटन से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जहाँ गामा-बंटन का आकार प्राचल $\alpha > 0$ तथा मापकी प्राचल $\beta = 1$ है। उपयुक्त अचर C के लिए, $H_1 : \alpha = 2$ के विरूद्ध $H_0 : \alpha = 1$ के शक्तितम परीक्षण के निराकरण क्षेत्र निम्न तरह का है

1. $\prod_{i=1}^{n} X_i > C$
2. $\sum_{i=1}^{n} X_i > C$
3. $\prod_{i=1}^{n} X_i < C$
4. $\sum_{i=1}^{n} X_i < C$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

54 704134

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ be a random sample from Uniform$(\theta, 1-\theta)$ distribution, where $-\infty < \theta < \frac{1}{2}$. The maximum likelihood estimator of θ is

1. $\min\{1 - \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$
2. $\max\{1 - \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$
3. $\min\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, 1 - \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$
4. $\max\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, 1 - \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 2)$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है जो Uniform$(\theta, 1-\theta)$ बंटन से लिए गए है, जहाँ $-\infty < \theta < \frac{1}{2}$ है। θ का अधिकतम संभाविता आकलक है

1. $\min\{1 - \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$
2. $\max\{1 - \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$
3. $\min\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, 1 - \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$
4. $\max\{\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, 1 - \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

55 704135

Suppose ϕ is a most powerful test of size 0.05 for testing a simple null hypothesis H_0 against a simple alternative hypothesis H_1. If the power of the test is 0.4, then which of the following is true?

1. $(1-\phi)$ is a most powerful test at level 0.6 for testing H_1 against H_0 .
2. $(1-\phi)$ is a most powerful test at level 0.4 for testing H_1 against H_0 .
3. $(1-\phi)$ is a most powerful test at level 0.05 for testing H_1 against H_0 .
4. $(1-\phi)$ is NOT a most powerful test for testing H_1 against H_0 at any level.

मानें कि साधारण वैकल्पिक परिकल्पना H_1 के विरूद्ध साधारण निराकरणीय परिकल्पना H_0 परीक्षण के लिए, ϕ आमाप 0.05 का एक शक्ततम परीक्षण है। यदि परीक्षण की शक्ति 0.04 है, तब निम्न में से कौन सा सत्य है?

1. H_0 के विरूद्ध परीक्षण H_1 के लिए $(1-\phi)$ स्तर 0.6 पर शक्ततम परीक्षण है।
2. H_0 के विरूद्ध परीक्षण H_1 के लिए $(1-\phi)$ स्तर 0.4 पर शक्ततम परीक्षण है।
3. H_0 के विरूद्ध परीक्षण H_1 के लिए $(1-\phi)$ स्तर 0.05 पर शक्ततम परीक्षण है।
4. H_0 के विरूद्ध परीक्षण H_1 के लिए $(1-\phi)$ किसी भी स्तर पर शक्ततम परीक्षण नहीं है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

56 704136

Let $X_1, X_2, \ldots, X_5$ be a random sample of size 5 from an absolutely continuous distribution having median M. Let S denote the number of X_i's greater than 0. For testing $H_0 : M = 0$ against $H_1 : M > 0$, let

$$\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{if } S > c \\ \nu, & \text{if } S = c \\ 0, & \text{if } S < c \end{cases}$$

be a test of size $\alpha = 0.05$, where $\nu \in [0, 1]$ and $c \in \{-1, 0, \ldots, 5\}$ are fixed constants. Then $c + \nu$ equals

1. $\frac{11}{25}$
2. $\frac{49}{6}$
3. $\frac{103}{25}$
4. $\frac{53}{6}$

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_5$ मध्यिका M वाले निरपेक्षत: संतत बंटन से आमाप 5 का यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। मानें कि 0 से अधिक X_i's की संख्या को S निरूपित करता है। $H_1 : M > 0$ के विरूद्ध परीक्षण $H_0 : M = 0$ के लिए, मानें कि

$$\phi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } S > c \\ \nu, & \text{यदि } S = c \\ 0, & \text{यदि } S < c \end{cases}$$

आमाप $\alpha = 0.05$ का परीक्षण है, जहां $\nu \in [0, 1]$ तथा $c \in \{-1, 0, \ldots, 5\}$ स्थिर अचर हैं। तब $c + \nu$ निम्न के बराबर है

1. $\frac{11}{25}$
2. $\frac{49}{6}$
3. $\frac{103}{25}$
4. $\frac{53}{6}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

57 704137

Consider a multiple linear regression model

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i,\ 1 \le i \le n,\ \ n > (p+1),$$

where the errors ϵ_i's are uncorrelated with zero mean and finite variance $\sigma^2 > 0$. Here, Y_i is the i-th response. Let $\hat{Y}_i$ be the i-th predicted response by the least squares estimation method, and let $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i,\ 1 \le i \le n$. Then, which of the following statements is true?

1. $\text{Var}(\hat{\epsilon}_i) \le \text{Var}(\epsilon_i),\ 1 \le i \le n$
2. $\text{Cov}(\hat{\epsilon}_i, \hat{\epsilon}_k) = \text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_k),$ for all $i \ne k = 1, 2, \ldots, n$
3. $\text{Var}(\hat{Y}_i) = \text{Var}(Y_i),\ 1 \le i \le n$
4. $E(\hat{Y}_i) < E(Y_i),\ 1 \le i \le n$

निम्न बहुरैखिक समाश्रयण मॉडल पर विचार करें

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i,\ 1 \le i \le n,\ \ n > (p+1),$$

जहां त्रुटियां ϵ_i असहसंबंधित हैं व उनका माध्य शून्य है तथा प्रसरण $\sigma^2 > 0$ परिमित है। यहां Y_i से i-वी अनुक्रिया निर्देशित करते हैं। मानें कि $\hat{Y}_i$ न्यूनतम वर्ग आकलन विधि द्वारा i-वी प्रागुक्त अनुक्रिया है, तथा $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i,\ 1 \le i \le n$ है। तब निम्न कथनों में कौन सा सत्य है?

1. $\text{Var}(\hat{\epsilon}_i) \le \text{Var}(\epsilon_i),\ 1 \le i \le n$
2. सभी $i \ne k = 1, 2, \ldots, n$ के लिए $\text{Cov}(\hat{\epsilon}_i, \hat{\epsilon}_k) = \text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_k)$
3. $\text{Var}(\hat{Y}_i) = \text{Var}(Y_i),\ 1 \le i \le n$
4. $E(\hat{Y}_i) < E(Y_i),\ 1 \le i \le n$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

58 704138

Let X, Y and Z be random variables such that

$$S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix} \sim W_2(10, \Sigma),$$

where W_2 denotes the Wishart distribution and

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Define $T = Z - \frac{Y^2}{X}$. Then, $\mathrm{Var}(T)$ equals

1. $\frac{77}{6}$
2. $\frac{81}{8}$
3. $\frac{83}{9}$
4. $\frac{79}{7}$

मानें कि X, Y तथा Z यादृच्छिक चर इस प्रकार हैं कि

$$S = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix} \sim W_2(10, \Sigma),$$

जहां W_2 विशार्ट बंटन को निरूपित करता है तथा

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

$T = Z - \frac{Y^2}{X}$ से परिभाषित करें। तब, $\mathrm{Var}(T)$ निम्न के बराबर है

1. $\frac{77}{6}$
2. $\frac{81}{8}$
3. $\frac{83}{9}$
4. $\frac{79}{7}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

59 704139

Let P be the population proportion of units possessing a certain attribute in a population of N units. Let p be the sample proportion in a simple random sample (without replacement) of n units, $(2 \leq n < N)$. Then an unbiased estimator of $P(1-P)$ is

1. $\frac{(N-n)}{Nn}\, p(1-p)$
2. $\frac{(N-n)}{(N-1)n}\, p(1-p)$
3. $\frac{n}{(n-1)}\, p(1-p)$
4. $\frac{(N-1)n}{N(n-1)}\, p(1-p)$

मानें कि N यूनिट की समष्टि में, कुछ विशेष गुणों से युक्त यूनिट का समष्टि अनुपात P है। मान लें कि n यूनिट $(2 \leq n < N)$ के एक साधारण यादृच्छिक प्रतिदर्श (प्रतिस्थापन के बिना) में प्रतिदर्श अनुपात p है। तब $P(1-P)$ का अनभिनत आकलक है

1. $\frac{(N-n)}{Nn}\, p(1-p)$
2. $\frac{(N-n)}{(N-1)n}\, p(1-p)$
3. $\frac{n}{(n-1)}\, p(1-p)$
4. $\frac{(N-1)n}{N(n-1)}\, p(1-p)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Objective Question

60 704140

Consider an $M/G/1$ queuing system with arrival rate $\lambda = 1$ and independent and identically distributed successive service times having probability density function

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Define, for $i = 1, 2, \ldots,$

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{if the first transition is from } i \text{ to } i-1 \\ 0 & \text{if the first transition is from } i \text{ is } i+1. \end{cases}$$

Then, $\text{Var}(I_2)$ equals

1. $\frac{5}{32}$
2. $\frac{5}{24}$
3. $\frac{3}{16}$
4. $\frac{8}{15}$

एक पंक्तिप्रणाली $M/G/1$ पर विचार करें जिसकी आगमन दर $\lambda = 1$ है व स्वतंत्र एवं सर्वथासमानत: बंटित उत्तरोतर सेवा समयों का प्रायिकता घनत्व फलन निम्न है

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{यदि } x > 0 \\ 0 & \text{अन्यथा।} \end{cases}$$

परिभाषित करें, $i = 1, 2, \ldots$ के लिए

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{यदि पहला संक्रमण } i \text{ से } i-1 \text{ को है} \\ 0 & \text{यदि पहला संक्रमण } i \text{ से } i+1 \text{ को है।} \end{cases}$$

तब $\text{Var}(I_2)$ निम्न के बराबर है

1. $\frac{5}{32}$
2. $\frac{5}{24}$
3. $\frac{3}{16}$
4. $\frac{8}{15}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

61 704141

Which of the following statements are true?

1. Let $x, y \in \mathbb{R}$ with $x < y$. Then there exists $r \in \mathbb{Q}$ such that $x < \frac{2^{2024}}{e} r < y$.
2. Let $(a_n)_{n \geq 2}$ be a sequence of positive real numbers. If there exists a positive real number L such that $\limsup_{n \to \infty} \frac{a_n}{\log n} = L$, then $\limsup_{n \to \infty} a_n < \infty$.
3. The set of all finite subsets of $\mathbb{Q}$ is countably infinite.
4. The set of continuous functions from $\mathbb{R}$ to the set $\{0, 1\}$ is infinite.

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. मानें कि $x, y \in \mathbb{R}$ व $x < y$ है। तब ऐसा $r \in \mathbb{Q}$ है जिसके लिए $x < \frac{2^{2024}}{e} r < y$ है।
2. मानें कि $(a_n)_{n \geq 2}$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम है। यदि धनात्मक वास्तविक संख्या L इस प्रकार है कि $\limsup_{n \to \infty} \frac{a_n}{\log n} = L$, तब $\limsup_{n \to \infty} a_n < \infty$
3. $\mathbb{Q}$ के सभी परिमित उपसमुच्चयों का समुच्चय गणनीयत: अनंत है।
4. $\mathbb{R}$ से समुच्चय $\{0, 1\}$ को सतत फलनों का समुच्चय अनंत है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

62 704142

Let $(a_n)_{n \geq 1}$, $(b_n)_{n \geq 1}$ and $(c_n)_{n \geq 1}$ be sequences given by

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \left(1 + e^{-n}\right), \\ b_n &= \max\{a_1, \ldots, a_n\}, \text{ and} \\ c_n &= \min\{a_1, \ldots, a_n\}. \end{aligned}$$

Which of the following statements are true?

1. $(a_n)_{n \geq 1}$ does not converge.
2. $\limsup_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$
3. $\liminf_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} c_n$
4. $\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} c_n$

मानें कि $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ तथा $(c_n)_{n\geq 1}$ निम्न द्वारा दिए गए अनुक्रम हैं

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \left(1+e^{-n}\right), \\ b_n &= \max\{a_1, \ldots, a_n\}, \text{ तथा} \\ c_n &= \min\{a_1, \ldots, a_n\}. \end{aligned}$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $(a_n)_{n\geq 1}$ अभिसरित नहीं होता है।
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$
3. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$
4. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

63 704143

Consider the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Which of the following statements are true?

1. $\lim_{x\to 0} f(x)$ exists.
2. f is continuous at 0.
3. f is differentiable at 0.
4. $\lim_{x\to 0} f'(x)$ does not exist.

फलन $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ पर विचार करें जो निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{यदि } x \neq 0, \\ 0, & \text{यदि } x = 0. \end{cases}$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\lim_{x \to 0} f(x)$ का अस्तित्व है।
2. 0 पर f सतत है।
3. 0 पर f अवकलनीय है।
4. $\lim_{x \to 0} f'(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

64 704144

For each positive integer n, define $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ by

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n.$$

Which of the following statements are true?

1. $(f_n)_{n \geq 1}$ does not converge pointwise on $[0, 1]$.
2. $(f_n)_{n \geq 1}$ converges pointwise to a continuous function on $[0, 1]$.
3. $(f_n)_{n \geq 1}$ converges pointwise to a discontinuous function on $[0, 1]$.
4. $(f_n)_{n \geq 1}$ does not converge uniformly on $[0, 1]$.

प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिए, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ को निम्न द्वारा परिभाषित करें।

$$f_n(x) = nx(1-x)^n.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $[0,1]$ पर $(f_n)_{n\geq 1}$ बिन्दुवत अभिसरित नहीं होता है।
2. $[0,1]$ पर $(f_n)_{n\geq 1}$ सतत फलन को बिंदुवत अभिसरित होता है।
3. $[0,1]$ पर $(f_n)_{n\geq 1}$ असतत फलन को बिंदुवत अभिसरित होता है।
4. $[0,1]$ पर $(f_n)_{n\geq 1}$ एकसमानत: अभिसरित नहीं होता है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

65 704145

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $f(x) = 0$ for all $x \leq 0$ and for all $x \geq 1$. Define

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Which of the following statements are true?

1. F is bounded.
2. F is continuous on $\mathbb{R}$.
3. F is uniformly continuous on $\mathbb{R}$.
4. F is not uniformly continuous on $\mathbb{R}$.

मानें कि $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ सतत फलन इस प्रकार है कि $f(x) = 0$ सभी $x \leq 0$ तथा सभी $x \geq 1$ के लिए है। परिभाषित करें

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. F परबिद्ध है।
2. $\mathbb{R}$ पर F सतत है।
3. $\mathbb{R}$ पर F एकसमानत: सतत है।
4. $\mathbb{R}$ पर F एकसमानत: सतत नहीं है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

66 704146

Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Define

$$f(x) = \int_0^x (x - t)g(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Which of the following statements are true?

1. $f(0) = 0$
2. $f'(0)$ exists and $f'(0) = 0$.
3. $f''(0)$ exists and $f''(0) = g(0)$.
4. $f''(0)$ exists but $f''(0) \neq g(0)$.

मानें कि $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ सतत फलन है। परिभाषित करें

$$f(x) = \int_0^x (x - t)g(t)\, \mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}.$$

निम्न कथनों में कौन से सत्य हैं?

1. $f(0) = 0$
2. $f'(0)$ का अस्तित्व है तथा $f'(0) = 0$
3. $f''(0)$ का अस्तित्व है तथा $f''(0) = g(0)$
4. $f''(0)$ का अस्तित्व है परंतु $f''(0) \neq g(0)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

67 704147

Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a monotonic function. Which of the following statements are true?

1. f is Riemann integrable on $[0, 1]$.
2. The set of discontinuities of f cannot contain a non-empty open set.
3. f is a Lebesgue measurable function.
4. f is a Borel measurable function.

मानें कि $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ एकदिष्ट फलन है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $[0, 1]$ पर f रीमान् समाकल है।
2. f के असांतत्य के समुच्चय में अरिक्त विवृत समुच्चय निहित नहीं हो सकता है।
3. f लेबेग-मेय फलन है।
4. f बोरल-मेय फलन है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

68 704148

For a positive real number a, $\sqrt{a}$ denotes the positive square root of a. Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2 + y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Which of the following statements are true?

1. f is continuous at $(0, 0)$.
2. The partial derivatives $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ exist at $(0, 0)$.
3. f is differentiable at $(0, 0)$.
4. f is not differentiable at $(0, 0)$.

धनात्मक वास्तविक संख्या a के लिए, a के धनात्मक वर्गमूल को $\sqrt{a}$ से निरूपित करते है। फलन $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ पर विचार करें जो निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $(0,0)$ पर f सतत है।
2. $(0,0)$ पर आंशिक अवकलज $\frac{\partial f}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}$ का अस्तित्व है।
3. $(0,0)$ पर f अवकलनीय है।
4. $(0,0)$ पर f अवकलनीय नहीं है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

69 704149

Consider the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defined by

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} + e^{xy}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Which of the following statements are true?

1. f is differentiable on $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. All the directional derivatives of f exist at $(0,0)$.
3. f is differentiable on $\mathbb{R}^2$.
4. f is not continuous at $(0,0)$.

फलन $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ पर विचार करें जो निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} + e^{xy}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ पर f अवकलनीय है।
2. $(0,0)$ पर f के सभी दिक्-अवकलजों का अस्तित्व है।
3. $\mathbb{R}^2$ पर f अवकलनीय है।
4. $(0,0)$ पर f सतत नहीं है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

70 704150

Consider

$$X = \{u \mid u : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ is continuous and } u(0) = 0\}$$

with the sup norm

$$\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|.$$

Let $T(u) = \displaystyle\int_0^1 u(t)\, \mathrm{d}t$ and $S = \{|T(u)| : u \in X, \|u\| \leq 1\}$. Which of the following statements are true?

1. S is an unbounded subset of $\mathbb{R}$.
2. S is a bounded subset of $\mathbb{R}$ and $\sup(S) = 1$.
3. There exists $u \in X$ such that $\|u\| = 1$ and $T(u) = 1$.
4. S is a closed subset of $\mathbb{R}$.

मानें कि

$$X = \{u \mid u : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ सतत है तथा } u(0) = 0\}$$

तथा sup मानक

$$\|u\| = \sup_{x \in [0,1]} |u(x)|$$

है। मानें कि $T(u) = \int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ तथा $S = \{|T(u)| : u \in X, \|u\| \leq 1\}$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mathbb{R}$ का एक अपरिबद्ध उपसमुच्चय S है।
2. $\mathbb{R}$ का एक परिबद्ध उपसमुच्चय S है तथा $\sup(S) = 1$
3. ऐसा कोई $u \in X$ है जिसके लिए $\|u\| = 1$ तथा $T(u) = 1$ है।
4. $\mathbb{R}$ का एक संवृत उपसमुच्चय S है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

71 704151

For a variable x, consider the real vector space

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Let $D : V \to V$ be the linear transformation where $D(f)$ is the derivative of f with respect to x, and $M : V \to V$ be the linear transformation $M(f) = xD(f)$. Which of the following statements are true?

1. $DM \neq MD$.
2. $D + M$ is invertible.
3. DM is invertible.
4. $\text{rank}(DM) = \text{rank}(MD)$.

एक चर x के लिए वास्तविक सदिश समष्टि

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

पर विचार करें। मानें कि $D : V \to V$ ऐसा रैखिक रूपांतरण है जहाँ x के सापेक्ष f का अवकलज $D(f)$ है, तथा $M : V \to V$ रैखिक रूपांतरण $M(f) = xD(f)$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $DM \neq MD$
2. $D + M$ व्युत्क्रमणीय है।
3. DM व्युत्क्रमणीय है।
4. $\text{rank}(DM) = \text{rank}(MD)$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

72 704152

For a variable x, consider the $\mathbb{Q}$-vector space

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}.$$

Further, let

$$A = \{f : V \to \mathbb{Q} \mid f \text{ is a } \mathbb{Q}\text{-linear transformation}\}$$

and $B = \{f \in A \mid f(1) = 0\}$. Which of the following statements are true?

1. If $f \in B$, then $\dim \ker f = 3$
2. $\dim B = 3$
3. $\dim A = 4$
4. If $f \in A$, then the image of f is a one-dimensional $\mathbb{Q}$-vector space.

एक चर x के लिए $\mathbb{Q}$-सदिश समष्टि

$$V = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$

पर विचार करें। । मानें कि

$$A = \{f : V \to \mathbb{Q} \mid f,\ \mathbb{Q}\text{-रैखिक रूपांतरण है}\}$$

तथा $B = \{f \in A \mid f(1) = 0\}$ है। निम्न कथनों में कौन से सत्य हैं?

1. यदि $f \in B$, तब $\dim \ker f = 3$
2. $\dim B = 3$
3. $\dim A = 4$
4. यदि $f \in A$, तब f का प्रतिबिंब एक-विम $\mathbb{Q}$-सदिश समष्टि है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

73 704153

Let A, B be 2×2 matrices with real entries, and $M = AB - BA$. Let I_2 denote the 2×2 identity matrix. Which of the following statements are necessarily true?

1. If A and B are upper triangular, then M is diagonalizable over $\mathbb{R}$.
2. If A and B are diagonalizable over $\mathbb{R}$, then M is diagonalizable over $\mathbb{R}$.
3. If A and B are diagonalizable over $\mathbb{R}$, then there exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $M = \lambda I_2$.
4. There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $M^2 = \lambda I_2$.

वास्तविक प्रविष्टियों वाले 2×2 आव्यूह A तथा B पर विचार करें, तथा मानें कि $M = AB - BA$ है। 2×2 तत्समक आव्यूह को I_2 से निरूपित करता है। निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकत: सत्य हैं?

1. यदि A तथा B उपरि-त्रिभुजीय है, तब $\mathbb{R}$ पर M विकर्णनीय है।
2. यदि $\mathbb{R}$ पर A तथा B विकर्णनीय है, तब $\mathbb{R}$ पर M विकर्णनीय है।
3. यदि $\mathbb{R}$ पर A तथा B विकर्णनीय हैं, तब ऐसा $\lambda \in \mathbb{R}$ होगा ताकि $M = \lambda I_2$ हो।
4. ऐसा $\lambda \in \mathbb{R}$ होगा ताकि $M^2 = \lambda I_2$ हो।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

		A3 : 3 3 A4 : 4 4

Multiple Response

74	704154	Let $M_2(\mathbb{R})$ denote the $\mathbb{R}$-vector space of 2×2 matrices with real entries. Let $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$ Define a linear transformation $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ by $T(X) = AXB^{\mathrm{t}}$, where B^{t} denotes the transpose of the matrix B. Which of the following statements are true? 1. $\det(T) = 225$ 2. $\det(T) = -225$ 3. Trace $(T) = 16$ 4. Trace $(T) = -16$ वास्तविक प्रविष्टियों वाले 2×2 आव्यूहों के $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि को $M_2(\mathbb{R})$ से निरूपित करें। मानें कि $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$ रैखिक रूपांतरण $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ को $T(X) = AXB^{\mathrm{t}}$ द्वारा परिभाषित करें, जहां B के आव्यूह परिवर्त को B^{t} से निरूपित करते हैं। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं? 1. $\det(T) = 225$ 2. $\det(T) = -225$ 3. Trace $(T) = 16$ 4. Trace $(T) = -16$ A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Multiple Response

75	704155	

For every integer $n \geq 2$, consider a $\mathbb{C}$-linear transformation $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Let V be a subspace of $\mathbb{C}^n$ such that $T(V) \subseteq V$. Which of the following statements are necessarily true?

1. There exists a subspace W of $\mathbb{C}^n$ such that $\mathbb{C}^n = V + W$ and $V \cap W = \{0\}$.
2. There exists a subspace W of $\mathbb{C}^n$ such that $T(W) \subseteq W$, $\mathbb{C}^n = V + W$ and $V \cap W = \{0\}$.
3. Suppose that there exists a positive integer k such that T^k is the identity map. Then there exists a subspace W of $\mathbb{C}^n$ such that $T(W) \subseteq W$, $\mathbb{C}^n = V + W$ and $V \cap W = \{0\}$.
4. Suppose that there exists a subspace W of $\mathbb{C}^n$ such that $T(W) \subseteq W$, $\mathbb{C}^n = V + W$ and $V \cap W = \{0\}$. Then there exists a positive integer k such that T^k is the identity map.

प्रत्येक पूर्णांक $n \geq 2$ के लिए, $\mathbb{C}$-रैखिक रूपांतरण $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ पर विचार करें। मानें कि $\mathbb{C}^n$ की उपसमष्टि V इस प्रकार है कि $T(V) \subseteq V$ है। निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकतः सत्य हैं?

1. $\mathbb{C}^n$ की कोई उपसमष्टि W इस प्रकार होगी कि $\mathbb{C}^n = V + W$ तथा $V \cap W = \{0\}$ हो।
2. $\mathbb{C}^n$ की कोई उपसमष्टि W इस प्रकार होगी कि $T(W) \subseteq W$, $\mathbb{C}^n = V + W$ तथा $V \cap W = \{0\}$ हो।
3. मानें कि धनात्मक पूर्णांक k इस प्रकार हैं कि T^k तत्समक रूपांतरण है। तब $\mathbb{C}^n$ की कोई उपसमष्टि W इस प्रकार होगी कि $T(W) \subseteq W$, $\mathbb{C}^n = V + W$ तथा $V \cap W = \{0\}$ है।
4. मानें कि $\mathbb{C}^n$ की कोई ऐसी उपसमष्टि W इस प्रकार है कि $T(W) \subseteq W$, $\mathbb{C}^n = V + W$ तथा $V \cap W = \{0\}$ है। तब कोई ऐसा धनात्मक पूर्णांक k होगा जिसके लिए T^k तत्समक रूपांतरण हो।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

76 704156

Let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Which of the following statements are true?

1. Both A and B are diagonalizable over $\mathbb{R}$.
2. A is diagonalizable over $\mathbb{C}$ but not over $\mathbb{R}$.
3. Neither A nor B is diagonalizable over $\mathbb{R}$, but both A and B are diagonalizable over $\mathbb{C}$.
4. Neither A nor B is diagonalizable over $\mathbb{C}$.

मानें कि

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{तथा} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mathbb{R}$ पर दोनों A तथा B विकर्णनीय हैं।
2. $\mathbb{C}$ पर A विकर्णनीय है परंतु $\mathbb{R}$ पर नहीं।
3. $\mathbb{R}$ पर न ही A और न ही B विकर्णनीय है, परंतु $\mathbb{C}$ पर दोनों A तथा B विकर्णनीय हैं।
4. $\mathbb{C}$ पर न ही A और न ही B विकर्णनीय है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

77 704157

Let V be the $\mathbb{R}$-vector space of real valued continuous functions on the interval $[0, \pi]$ with the inner product given by

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Let $S = \{\sin(x), \cos(x), \sin^2(x), \cos^2(x)\}$ and W be the subspace of V generated by S Which of the following statements are true?

1. S is a basis of W.
2. S is an orthonormal basis of W.
3. There exist $f, g \in S$ such that $\langle f, g \rangle = 0$.
4. S contains an orthonormal basis of W.

अंतराल $[0, \pi]$ पर वास्तविक मान वाले सतत फलनों की $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि को V से निर्दिष्ट करें, व उसपर निम्न आंतर गुणनफल लें

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)\, \mathrm{d}x.$$

मानें कि $S = \{\sin(x), \cos(x), \sin^2(x), \cos^2(x)\}$ है तथा, S द्वारा जनित V की उपसमष्टि W है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. W का एक आधार S है।
2. W का एक प्रसामान्य लांबिक आधार S है।
3. ऐसे $f, g \in S$ हैं कि $\langle f, g \rangle = 0$ हो।
4. W का कोई प्रसामान्य लांबिक आधार S में निहित है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

78 704158

For a 4×4 positive definite real symmetric matrix A and real numbers a, b, c, d, consider the 5×5 matrix

$$B = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & A & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{array}\right).$$

Which of the following statements are necessarily true?

1. $\det(B) > 0$ for every nonzero $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
2. $\det(B) > 0$ for infinitely many $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
3. $\det(B) \leq 0$ for every $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.
4. $\det(B) \leq 0$ for infinitely many $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

4×4 धनात्मक-निश्चित वास्तविक सममित आव्यूह A, तथा वास्तविक संख्याओं a, b, c, d, के लिए, निम्न 5×5 आव्यूह पर विचार करें।

$$B = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & a & b & c & d \\ \hline a & & & & \\ b & & A & & \\ c & & & & \\ d & & & & \end{array}\right).$$

निम्न कथनों में से कौन से आवश्यकत: सत्य हैं?

1. प्रत्येक शून्येतर $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ के लिए $\det(B) > 0$ होगा।
2. ऐसे $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ की संख्या, जिनके लिए $\det(B) > 0$ हो, अनंत है।
3. प्रत्येक $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ के लिए $\det(B) \leq 0$ होगा।
4. ऐसे $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ की संख्या, जिनके लिए $\det(B) \leq 0$ हो, अनंत है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

79 704159

Let $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ be a holomorphic function that does not take any value in the set $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$. Which of the following statements are true?

1. f is constant.
2. f has removable singularities at -1 and 1.
3. f is bounded.
4. f has either poles or essential singularities at -1 and 1.

मानें कि $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ एक ऐसा होलोमार्फिक फलन है जो कि समुच्चय $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ में कोई मान नहीं लेता है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. f अचर है।
2. f की -1 तथा 1 पर अपनेय विचित्रताएं हैं।
3. f परिबद्ध है।
4. f के -1 तथा 1 पर या तो ध्रुव हैं या अनिवार्य विचित्रताएं हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

		A3 : 3 3 A4 : 4 4

Multiple Response

80	704160	Let $P(z)$ be a non-constant polynomial over $\mathbb{C}$. Given $R > 0$, let $S_R = \{z \in \mathbb{C} : \lvert P(z)\rvert < R\}$. Which of the following statements are true? 1. S_R is an open subset of $\mathbb{C}$. 2. S_R is a bounded subset of $\mathbb{C}$. 3. $\lvert P(z)\rvert = R$ for every z on the boundary of S_R. 4. Every connected component of S_R contains a zero of $P(z)$. मानें कि $\mathbb{C}$ पर $P(z)$ अचरेतर बहुपद है। दिये गये $R > 0$ के लिये, मानें कि $S_R = \{z \in \mathbb{C} : \lvert P(z)\rvert < R\}$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं? 1. $\mathbb{C}$ का S_R विवृत उपसमुच्चय है। 2. $\mathbb{C}$ का S_R परिबद्ध उपसमुच्चय है। 3. S_R की परिसीमा पर प्रत्येक z के लिए $\lvert P(z)\rvert = R$ होगा। 4. S_R के प्रत्येक संबद्ध-अवयव मे $P(z)$ का एक शून्य निहित है। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Multiple Response

81	704161	Let disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$ and f be a holomorphic function on $\mathbb{D}$ such that the function $g(z) = e^{1/z} f(z)$ on $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ is bounded. Which of the following statements are true? 1. $f(0) = 0$ 2. $f(z) = 0$ for all $z \in \mathbb{D}$. 3. There exists a nonzero constant c such that $f(z) = ce^{-1/z}$ for all $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$. 4. There exists a nonzero constant c and a positive integer n such that $f(z) = cz^n e^{-1/z}$ for all $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

मानें कि f चक्रिका $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ पर ऐसा होलोमार्फिक फलन है जिसके लिए $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ पर फलन $g(z) = e^{1/z} f(z)$ परिबद्ध है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $f(0) = 0$
2. सभी $z \in \mathbb{D}$ के लिए $f(z) = 0$ है।
3. ऐसा शून्येतर अचर c होगा कि सभी $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ के लिए $f(z) = ce^{-1/z}$ है।
4. ऐसा शून्येतर अचर c, तथा ऐसा धनात्मक पूर्णांक n इस प्रकार होंगे, कि सभी $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ के लिए $f(z) = cz^n e^{-1/z}$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

82 704162

Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be an entire function such that $f(z) = f(iz)$ for all $z \in \mathbb{C}$. Which of the following statements are true?

1. $f(z) = f(-z)$ for all $z \in \mathbb{C}$.
2. $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$
3. There is an entire function $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ such that $f(z) = g(z^4)$ for all $z \in \mathbb{C}$.
4. f is necessarily a constant function.

मानें कि एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ इस प्रकार है कि सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z) = f(iz)$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं ?

1. सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z) = f(-z)$
2. $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$
3. एक सर्वत्र वैश्लेषिक फलन $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ इस प्रकार होगा कि सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $f(z) = g(z^4)$
4. f आवश्यकत: अचर फलन है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

83 704163

Which of the following statements are true?

1. The value of the Euler φ-function is even for all integers $n \geq 3$.
2. Let G be a finite group and S a subset of G with $|S| > \frac{|G|}{2}$. Then $\{ab : a, b \in S\} = G$.
3. The polynomial ring $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ is a Euclidean domain for all integers $n \geq 1$.
4. The subset $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(1/2) = 0\}$ of the ring $\mathcal{C}([0,1])$ of continuous functions from $[0,1]$ to $\mathbb{R}$ is a prime ideal.

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं

1. ऑयलर φ-फलन का मान सभी पूर्णांकों $n \geq 3$ के लिए सम है।
2. मानें कि G एक परिमित समूह है तथा G का उपसमुच्चय S इस प्रकार है कि $|S| > \frac{|G|}{2}$ हो। तब $\{ab : a, b \in S\} = G$ होगा।
3. बहुपद वलय $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ सभी पूर्णांकों $n \geq 1$ के लिए युक्लिडीय प्रान्त है।
4. $[0,1]$ से $\mathbb{R}$ पर सतत फलनों के वलय $\mathcal{C}([0,1])$ में, उपसमुच्चय $\{f \in \mathcal{C}([0,1]) : f(1/2) = 0\}$ एक अभाज्य गुणजावली है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

84 704164

For a positive integer n and a subset S of the set of positive integers, let $S(n)$ denote the set

$$\{s \in S \mid s \leq n\}.$$

Let X be a subset of the set of positive integers such that $\lim_{n\to\infty} \frac{|X(n)|}{n} = 1$. Assume that there exist pairwise disjoint subsets $X_1, X_2, \ldots, X_8$ of X such that $\bigcup_{i=1}^{8} X_i = X$. Which of the following statements are true?

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n}$ exists for all $1 \leq i \leq 8$.
2. $\liminf_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n} \geq 0$ for all $1 \leq i \leq 8$.
3. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n} \geq 1/8$ for some $1 \leq i \leq 8$.
4. $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n} < 1/8$ for all $1 \leq i \leq 8$.

किसी धनात्मक पूर्णांक n, तथा सभी धनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय के उपसमुच्चय S के लिए, मानें कि $S(n)$ निम्न समुच्चय को निरूपित करता है:

$$\{s \in S \mid s \leq n\}.$$

मानें कि सभी धनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय का उपसमुच्चय X इस प्रकार है कि $\lim_{n\to\infty} \frac{|X(n)|}{n} = 1$ है। मानें कि X के युगलतः असंयुक्त उपसमुच्चयों $X_1, X_2, \ldots, X_8$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $\bigcup_{i=1}^{8} X_i = X$ है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं ?

1. सभी $1 \leq i \leq 8$ के लिए $\lim_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n}$ का अस्तित्व है।
2. सभी $1 \leq i \leq 8$ के लिए $\liminf_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n} \geq 0$ है।
3. किसी $1 \leq i \leq 8$ के लिए $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n} \geq 1/8$ है।
4. सभी $1 \leq i \leq 8$ के लिए $\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_i(n)|}{n} < 1/8$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

85 704165

Let R be a nonzero ring with unity such that $r^2 = r$ for all $r \in R$. Which of the following statements are true?

1. R is never an integral domain.
2. $r = -r$ for all $r \in R$.
3. Every nonzero prime ideal of R is maximal.
4. R must be a commutative ring.

मानें कि R इकाई वाला ऐसा शून्येतर वलय है जिसमें सभी $r \in R$ के लिए $r^2 = r$ है। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं ?

1. R कभी भी पूर्णांकीय प्रान्त नहीं होगा।
2. सभी $r \in R$ के लिए $r = -r$ होगा।
3. R की प्रत्येक शून्येतर अभाज्य गुणजावली उच्चिष्ठ है।
4. R का क्रमविनिमेय वलय होना आवश्यक है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

86 704166

A group G is said to be divisible if for every $y \in G$ and for every positive integer n, there exists $x \in G$ such that $x^n = y$. Which of the following groups are divisible?

1. $\mathbb{Q}$ with ordinary addition
2. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ with ordinary multiplication
3. The cyclic group of order 5
4. The symmetric group S_5

समूह G को विभाज्य कहा जाता है यदि प्रत्येक $y \in G$ तथा प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिए कोई ऐसा $x \in G$ मिलेगा कि $x^n = y$ हो। निम्न समूहों में से कौन से विभाज्य हैं?

1. साधारण योग के साथ $\mathbb{Q}$
2. साधारण गुणन के साथ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
3. 5 कोटि का चक्रीय समूह
4. सममित समूह S_5

A1 : 1

			1
		A2 :	2
			2
		A3 :	3
			3
		A4 :	4
			4

Multiple Response

87 704167

Let $f \in \mathbb{R}[x]$ be a product of distinct monic irreducible polynomials $P_1, P_2, \ldots, P_n$, where $n \geq 2$. Let (f) denote the ideal generated by f in the ring $\mathbb{R}[x]$. Which of the following statements are true?

1. $\mathbb{R}[x]/(f)$ is a field.
2. $\mathbb{R}[x]/(f)$ is a finite dimensional $\mathbb{R}$-vector space.
3. $\mathbb{R}[x]/(f)$ is a direct sum of fields, each of which is isomorphic to $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.
4. There are no non-zero elements $u \in \mathbb{R}[x]/(f)$ such that $u^m = 0$ for some $m \geq 1$.

मानें कि $f \in \mathbb{R}[x]$ अलग-अलग एकगुणांकी अलघुकरणीय बहुपदों $P_1, P_2, \ldots, P_n$ का गुणनफल है, जहां $n \geq 2$ है। वलय $\mathbb{R}[x]$ में f द्वारा जनित गुणजावली को (f) से निरूपित करें। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\mathbb{R}[x]/(f)$ एक क्षेत्र है।
2. $\mathbb{R}[x]/(f)$ परिमित विमा की $\mathbb{R}$-सदिश समष्टि है।
3. $\mathbb{R}[x]/(f)$ ऐसे क्षेत्रों का सीधा योग है, जो या तो $\mathbb{R}$ या $\mathbb{C}$ के तुल्याकारी है।
4. कोई भी ऐसा शून्येतर अवयव $u \in \mathbb{R}[x]/(f)$ ऐसा नहीं हैं जो किसी $m \geq 1$ के लिए समीकरण $u^m = 0$ संतुष्ट करता हो।

		A1 :	1
			1
		A2 :	2
			2
		A3 :	3
			3
		A4 :	4
			4

Multiple Response

88 704168

Consider the polynomial $f(x) = x^{2025} - 1$ over $\mathbb{F}_5$, where $\mathbb{F}_5$ is the field with five elements. Let S be the set of all roots of f in an algebraic closure of the field $\mathbb{F}_5$. Which of the following statements are true?

1. S is a cyclic group.
2. S has $\varphi(2025)$ elements, where φ denotes the Euler φ-function.
3. S has $\varphi(2025)$ generators, where φ denotes the Euler φ-function.
4. S has 81 elements.

पांच अवयवों वाले क्षेत्र $\mathbb{F}_5$ पर बहुपद $f(x) = x^{2025} - 1$ लेते हैं। मानें कि S क्षेत्र $\mathbb{F}_5$ के किसी बीजीय संवरक में f के सभी मूलों का समुच्चय है। निम्न कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं?

1. S एक चक्रीय समूह है।
2. S के $\varphi(2025)$ अवयव हैं, जहां φ ऑयलर φ-फलन को निरूपित करता है।
3. S के $\varphi(2025)$ जनक हैं, जहां φ ऑयलर φ-फलन को निरूपित करता है।
4. S के 81 अवयव हैं।

A1 : 1
1
A2 : 2
2
A3 : 3
3
A4 : 4
4

Multiple Response

89 704169

Define a topology τ on $\mathbb{R}$ as follows: a subset U of $\mathbb{R}$ is in the topology τ if and only if $U = \emptyset$ or $0 \in U$. Which of the following statements are true?

1. The set of all irrational numbers is dense in $(\mathbb{R}, \tau)$.
2. For each prime number p, the set $\{0, \sqrt{p}\}$ is dense in $(\mathbb{R}, \tau)$.
3. $[0, 1]$ is compact in $(\mathbb{R}, \tau)$.
4. $(\mathbb{R}, \tau)$ is Hausdorff.

$\mathbb{R}$ पर सांस्थितिकी τ इस प्रकार परिभाषित करें: $\mathbb{R}$ का उपसमुच्चय U सांस्थितिकी τ में तभी और केवल तभी है, यदि $U = \emptyset$ हो या $0 \in U$ हो। निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $(\mathbb{R}, \tau)$ में सभी अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय सघन है।
2. प्रत्येक अभाज्य संख्या p के लिए, $(\mathbb{R}, \tau)$ में समुच्चय $\{0, \sqrt{p}\}$ सघन है।
3. $(\mathbb{R}, \tau)$ में $[0, 1]$ संहत है।
4. $(\mathbb{R}, \tau)$ हाउस्डोर्फ है।

		A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Multiple Response

90	704170	Let A, B, C be topological spaces such that A is homeomorphic to B, B is a subspace of C and $\overline{B} = C$. Let C be homeomorphic to a subspace W of A. Which of the following statements are **FALSE**? 1. The spaces $B, \overline{W}, C$ are homeomorphic. 2. The spaces B, W, C are homeomorphic. 3. If C is compact, then A, B, C are homeomorphic. 4. If A is connected, then B and C are connected. मानें कि A, B, C सांस्थितिक समष्टियां इस प्रकार हैं कि A, B के समरूपी है, C की उपसमष्टि B है तथा $\overline{B} = C$ है। मानें कि C, A की उपसमष्टि W के समरूपी है। निम्न कथनों में से कौन से **असत्य** हैं? 1. समष्टियां $B, \overline{W}, C$ समरूपी हैं। 2. समष्टियां B, W, C समरूपी हैं। 3. यदि C संहत है, तब A, B, C समरूपी हैं। 4. यदि A संबद्ध है, तब B तथा C संबद्ध हैं। A1 : 1 1 A2 : 2 2 A3 : 3 3 A4 : 4 4

Multiple Response

91	704171	

Consider the non-homogeneous ordinary differential equation (ODE)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin\left(e^{-5x}\right),\ x > 0.$$

Then which of the following statements are true?

1. Every solution of the ODE is bounded on $(0, \infty)$
2. There exists a solution of the ODE which is unbounded on $(0, \infty)$
3. Every solution of the ODE is unbounded on $(0, \infty)$
4. Every solution of the ODE tends to zero as $x \to \infty$

निम्न असमघाती साधारण अवकल समीकरण (ODE) पर विचार करें:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin\left(e^{-5x}\right),\ x > 0.$$

निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. ODE का प्रत्येक समाधान $(0, \infty)$ पर परिबद्ध है।
2. ODE का कोई समाधान ऐसा होगा जो $(0, \infty)$ पर अपरबिद्ध है।
3. ODE का प्रत्येक समाधान $(0, \infty)$ पर अपरिबद्ध है।
4. ODE का प्रत्येक समाधान शून्य को प्रवृत्त होता है जब $x \to \infty$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

92 704172

If $x = x(t), y = y(t)$ is the solution of the initial value problem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4e^{-2t}y, \\ \frac{dy}{dt} &= e^{2t}x - y, \\ x(0) = 1,\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

then which of the following statements are true?

1. $\lim_{t\to\infty} t^{-2}x(t)y(t) = 0$
2. $x(1) = 0, y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
3. $x\left(\frac{1}{2}\right) = 0, y(1) = 0$
4. $\lim_{t\to\infty} t^{-2}x(t)y(t) = 2$

यदि $x = x(t), y = y(t)$ निम्न प्रारंभिक मान समस्या का समाधान है

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 4e^{-2t}y, \\ \frac{dy}{dt} &= e^{2t}x - y, \\ x(0) = 1,\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

तब निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

1. $\lim_{t\to\infty} t^{-2}x(t)y(t) = 0$
2. $x(1) = 0, y\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
3. $x\left(\frac{1}{2}\right) = 0, y(1) = 0$
4. $\lim_{t\to\infty} t^{-2}x(t)y(t) = 2$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

93 704173

For $b \in \mathbb{R}$, let $y_b = y_b(x)$ be the unique solution of the initial value problem

$$\frac{dy}{dx} = y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1,\ y(0) = b$$

defined on its maximal interval of existence I_b. Then which of the following statements are true?

1. There exists an $\alpha \in (0, \infty)$ such that for every $b \in \mathbb{R}$ with $b > \alpha$, the solution y_b is bounded above on I_b
2. There exists an $\alpha \in (0, \infty)$ such that for every $b \in \mathbb{R}$ with $b > \alpha$, the solution y_b is bounded below on I_b
3. There exists an $\alpha \in (-\infty, 0)$ such that for every $b \in \mathbb{R}$ with $b < \alpha$, the solution y_b is bounded above on I_b
4. There exists an $\alpha \in (-\infty, 0)$ such that for every $b \in \mathbb{R}$ with $b < \alpha$, the solution y_b is bounded below on I_b

किसी भी $b \in \mathbb{R}$ के लिए $y_b = y_b(x)$ निम्न प्रारंभिक मान समस्या का ऐसा अद्वितीय समाधान है

$$\frac{dy}{dx} = y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1,\ y(0) = b$$

जो इसके अस्तित्व के उच्चिष्ठ अन्तराल I_b पर परिभाषित है। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. किसी $\alpha \in (0, \infty)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि प्रत्येक $b \in \mathbb{R}$ तथा $b > \alpha$ के लिए, समाधान y_b, I_b पर उपरि परिबद्ध है।
2. किसी $\alpha \in (0, \infty)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि प्रत्येक $b \in \mathbb{R}$ तथा $b > \alpha$ के लिए, समाधान y_b, I_b पर निम्न परिबद्ध है।
3. किसी $\alpha \in (-\infty, 0)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि प्रत्येक $b \in \mathbb{R}$ तथा $b < \alpha$ के लिए, समाधान y_b, I_b पर उपरि परिबद्ध है।
4. किसी $\alpha \in (-\infty, 0)$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि प्रत्येक $b \in \mathbb{R}$ तथा $b < \alpha$ के लिए, समाधान y_b, I_b पर निम्न परिबद्ध है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

94 704174

Let $u = u(x, y)$ be the solution of the boundary value problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0,\ (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = e^{\pi x},\ u(x, 1) &= -e^{\pi x},\ x \in [0, 1], \\ u(0, y) &= \cos(\pi y) + \sin(\pi y),\ y \in [0, 1], \\ u(1, y) &= e^{\pi}\big(\cos(\pi y) + \sin(\pi y)\big),\ y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Then there exists a point $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$ such that

1. $u(x_0, y_0) = \sqrt{2}\, e^{\pi}$
2. $u(x_0, y_0) = e^{\pi}$
3. $u(x_0, y_0) = -1$
4. $u(x_0, y_0) = -e^{\pi}$

मानें कि $u = u(x, y)$ निम्न परिसीमा मान समस्या का समाधान है:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0,\ (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \\ u(x, 0) = e^{\pi x},\ u(x, 1) &= -e^{\pi x},\ x \in [0, 1], \\ u(0, y) &= \cos(\pi y) + \sin(\pi y),\ y \in [0, 1], \\ u(1, y) &= e^{\pi}\big(\cos(\pi y) + \sin(\pi y)\big),\ y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

तब एक बिन्दु $(x_0, y_0) \in (0, 1) \times (0, 1)$ ऐसा होगा ताकि

1. $u(x_0, y_0) = \sqrt{2}\, e^{\pi}$
2. $u(x_0, y_0) = e^{\pi}$
3. $u(x_0, y_0) = -1$
4. $u(x_0, y_0) = -e^{\pi}$

A1 :	1
	1
A2 :	2
	2
A3 :	3
	3
A4 :	4
	4

Multiple Response

95 704175

Let $u = u(x,t)$ be the solution of the initial-boundary value problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = 4x(1-x),\ x \in [0,1],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \geq 0.$$

Then which of the following statements are true?

1. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ for all $x \in (0,1)$
2. $u(x,t) = u(1-x,t)$ for all $x \in (0,1), t > 0$
3. $\int_0^1 \left(u(x,t)\right)^2 dx$ is a non-increasing function of t
4. $\int_0^1 \left(u(x,t)\right)^2 dx$ is a non-decreasing function of t

मानें कि $u = u(x,t)$ निम्न प्रारंभिक मान समस्या का समाधान है

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty),$$
$$u(x,0) = 4x(1-x),\ x \in [0,1],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \geq 0.$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं ?

1. सभी $x \in (0,1)$ के लिए $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ होगा।
2. सभी $x \in (0,1)$ के लिए $t > 0$ $u(x,t) = u(1-x,t)$
3. $\int_0^1 \left(u(x,t)\right)^2 dx$, t का अवर्धमान फलन है
4. $\int_0^1 \left(u(x,t)\right)^2 dx$, t का अह्रासमान फलन है

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

96 704176

If $\lambda \in \mathbb{R}$ and $p \in \mathbb{R}$ are such that the quadrature formula

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \lambda h\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) + ph^3\big(f''(x_0) + f''(x_0+h)\big)$$

is exact for all polynomials of degree as high as possible, then

1. $2\lambda + 24p = 0$
2. $7\lambda - 12p = 4$
3. $2\lambda + 24p = -3$
4. $7\lambda - 12p = 11$

यदि $\lambda \in \mathbb{R}$ तथा $p \in \mathbb{R}$ इस प्रकार हैं कि क्षेत्रफलन-सूत्र

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \approx \lambda h\big(f(x_0) + f(x_0+h)\big) + ph^3\big(f''(x_0) + f''(x_0+h)\big)$$

अधिक से अधिक घात के बहुपदों के लिए यथातथ है, तब

1. $2\lambda + 24p = 0$
2. $7\lambda - 12p = 4$
3. $2\lambda + 24p = -3$
4. $7\lambda - 12p = 11$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

97 704177

Let $f(x)$ be the polynomial of degree at most 2 that interpolates the data

$$(-1,2),\ (0,1),\ \text{and}\ (1,2).$$

If $g(x)$ is a polynomial of degree at most 3 such that $f(x)+g(x)$ interpolates the data

$$(-1,2),\ (0,1),\ (1,2),\ \text{and}\ (2,17),$$

then

1. $f(5)+g(3)=50$
2. $2f(5)-g(3)=4$
3. $f(1)+g(3)=50$
4. $f(5)+g(3)=74$

$f(x)$ अधिक से अधिक घात 2 का ऐसा बहुपद है जो निम्न आंकड़ों को अंतर्वेशित करता है:

$$(-1,2),\ (0,1),\ \text{and}\ (1,2).$$

$g(x)$ अधिक से अधिक घात 3 का ऐसा बहुपद है कि $f(x)+g(x)$ निम्न आंकड़ों को अंतर्वेशित करता है:

$$(-1,2),\ (0,1),\ (1,2),\ \text{तथा}\ (2,17),$$

तब

1. $f(5)+g(3)=50$
2. $2f(5)-g(3)=4$
3. $f(1)+g(3)=50$
4. $f(5)+g(3)=74$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

98 704178

For any $b \in \mathbb{R}$, let $S(b)$ denote the set of all broken extremals with one corner of the variational problem

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left((y')^4 - 3(y')^2\right) dx,$$
$$\text{subject to } y(0) = 0,\ y(1) = b.$$

Then which of the following statements are true?

1. $S(2)$ has exactly two elements
2. $S\left(\frac{1}{2}\right)$ has exactly one element
3. $S(2)$ is empty
4. $S\left(\frac{1}{2}\right)$ has exactly two elements

किसी भी $b \in \mathbb{R}$ के लिए निम्न विचरण समस्या के सभी एक कोने वाले खंडित चरमकों के समुच्चय को $S(b)$ से निरूपित करें:

$$\text{minimize } J[y] = \int_0^1 \left((y')^4 - 3(y')^2\right) dx,$$
$$\text{सशर्त } y(0) = 0,\ y(1) = b.$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $S(2)$ के यथातथत: दो अवयव हैं
2. $S\left(\frac{1}{2}\right)$ के यथातथत: एक अवयव हैं
3. $S(2)$ रिक्त है
4. $S\left(\frac{1}{2}\right)$ के यथातथत: दो अवयव हैं

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

99 704179

Define

$$S := \{y \in \mathcal{C}^1[-1,1] \,:\, y(-1) = -1,\, y(1) = 3\}.$$

Let φ be the extremal of the functional $J : S \to \mathbb{R}$ given by

$$J[y] = \int_{-1}^{1} \left[(y')^3 + (y')^2\right] dx.$$

Define $\|y\|_\infty := \max\limits_{x\in[-1,1]} |y(x)|$ for every $y \in S$ and let $B_0(\varphi,\varepsilon) := \{y \in S \,:\, \|y-\varphi\|_\infty < \varepsilon\}$, $B_1(\varphi,\varepsilon) := \{y \in S \,:\, \|y-\varphi\|_\infty + \|y'-\varphi'\|_\infty < \varepsilon\}$. Then which of the following statements are true?

1. $\varphi(x) = 2x + 1$ for every $x \in [-1,1]$
2. There exists $\varepsilon > 0$ such that $J[y] \geq J[\varphi]$ for every $y \in B_0(\varphi,\varepsilon)$
3. There exists $\varepsilon > 0$ such that $J[y] \geq J[\varphi]$ for every $y \in B_1(\varphi,\varepsilon)$
4. There exists $\varepsilon > 0$ such that $J[y] \leq J[\varphi]$ for every $y \in B_1(\varphi,\varepsilon)$

निम्न परिभाषा लें:

$$S := \{y \in \mathcal{C}^1[-1,1] \,:\, y(-1) = -1,\, y(1) = 3\}.$$

मानें कि φ फलनक $J : S \to \mathbb{R}$ का चरमक है जो निम्न द्वारा दिया गया है:

$$J[y] = \int_{-1}^{1} \left[(y')^3 + (y')^2\right] dx.$$

प्रत्येक $y \in S$ के लिए $\|y\|_\infty := \max\limits_{x\in[-1,1]} |y(x)|$ को परिभाषित करें, व $B_0(\varphi,\varepsilon) := \{y \in S \,:\, \|y-\varphi\|_\infty < \varepsilon\}$, $B_1(\varphi,\varepsilon) := \{y \in S \,:\, \|y-\varphi\|_\infty + \|y'-\varphi'\|_\infty < \varepsilon\}$ लें। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. प्रत्येक $x \in [-1,1]$ के लिए $\varphi(x) = 2x + 1$ होगा
2. कोई $\varepsilon > 0$ इस प्रकार है कि प्रत्येक $y \in B_0(\varphi,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \geq J[\varphi]$ होगा
3. कोई $\varepsilon > 0$ इस प्रकार है कि प्रत्येक $y \in B_1(\varphi,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \geq J[\varphi]$ होगा
4. कोई $\varepsilon > 0$ इस प्रकार है कि प्रत्येक $y \in B_1(\varphi,\varepsilon)$ के लिए $J[y] \leq J[\varphi]$ होगा

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

100 704180

The integral equation

$$u(x) = f(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x-t)u(t)dt$$

has a unique solution if

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos 5x$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = \sin 5x$

समाकल समीकरण

$$u(x) = f(x) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x-t)u(t)dt$$

का अद्वितीय समाधान है यदि

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos 5x$
3. $f(x) = \sin x$
4. $f(x) = \sin 5x$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

101 704181

If u is the solution of the Volterra integral equation

$$u(x) = 3 + \sin x + \int_0^x \frac{3+\sin x}{3+\sin t}u(t)\,dt,$$

then

1. $u(\frac{\pi}{2}) = 4e^{\frac{\pi}{2}}$
2. $u(\pi) = 3e^{\pi}$
3. $u(-\pi) = 4e^{-\pi}$
4. $u(-\frac{\pi}{2}) = 4e^{\pi}$

यदि u निम्न वोल्टेरा समाकल समीकरण का समाधान है

$$u(x) = 3 + \sin x + \int_0^x \frac{3 + \sin x}{3 + \sin t} u(t)\, dt,$$

तब

1. $u(\frac{\pi}{2}) = 4e^{\frac{\pi}{2}}$
2. $u(\pi) = 3e^{\pi}$
3. $u(-\pi) = 4e^{-\pi}$
4. $u(-\frac{\pi}{2}) = 4e^{\pi}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

102 704182

Consider the system of two particles with total kinetic energy

$$T = \frac{5}{2}\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta,$$

and Lagrangian

$$L = \frac{5}{2}\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 2gl\cos\theta,$$

where x, θ are generalized coordinates, and g, l are positive constants. Then the non-zero frequency of the normal mode of the system with small oscillations ($|\theta| \ll 1$) is

1. $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}$
2. $\sqrt{\frac{5g}{3l}}$
3. $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$
4. $\sqrt{\frac{5g}{2l}}$

मान लें कि दो कणों के निकाय की कुल गतिज ऊर्जा

$$T = \frac{5}{2}\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta,$$

तथा लग्रान्जी

$$L = \frac{5}{2}\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + 2gl\cos\theta,$$

है, जहां x, θ व्यापकीकृति निर्देशांक, तथा g, l धनात्मक अचर है। तब अल्प दोलन ($|\theta| \ll 1$) वाले निकाय की प्रसामान्य विधा की शून्येतर आवृत्ति है

1. $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{g}{l}}$
2. $\sqrt{\frac{5g}{3l}}$
3. $\frac{5}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$
4. $\sqrt{\frac{5g}{2l}}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

103 704183

Suppose that a sequence of random variables $\{X_n\}_{n\geq 1}$ and the random variable X are defined on the same probability space. Then which of the following statements are true?

1. X_n converges to X almost surely as $n \to \infty$ implies that X_n converges to X in probability as $n \to \infty$.
2. X_n converges to X in probability as $n \to \infty$ implies that X_n converges to X almost surely as $n \to \infty$.
3. If $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \delta] < \infty$ for all $\delta > 0$, then X_n converges to X almost surely as $n \to \infty$.
4. If X_n converges to X in distribution as $n \to \infty$, and X is a constant with probability 1, then X_n converges to X in probability as $n \to \infty$.

मानें कि यादृच्छिक चरों का अनुक्रम $\{X_n\}_{n\geq 1}$ तथा यादृच्छिक चर X एक ही प्रायिकता समष्टि में परिभाषित हैं। तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. अगर X_n सर्वत्रप्राय X को अभिसरित है जब $n \to \infty$ तो X_n प्रायिकता में X को अभिसरित है जब $n \to \infty$
2. X_n प्रायिकता में X को अभिसरित है जब $n \to \infty$, तो X_n सर्वत्रप्राय X को अभिसरित है जब $n \to \infty$
3. यदि सभी $\delta > 0$ के लिए $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \delta] < \infty$, तब X_n सर्वत्रप्राय X को अभिसरित है जब $n \to \infty$
4. यदि X_n बंटन में X को अभिसरित है जब $n \to \infty$, तथा X अचर है जिसकी प्रायिकता 1 है, तब X_n प्रायिकता में X को अभिसरित है जब $n \to \infty$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

104 704184

Let $\{(X_k, Y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of independent and identically distributed (i.i.d.) random vectors with common joint probability density function

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{if } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

For $n = 1, 2, 3, \ldots$, let N_n be a random variable denoting the number of elements in the set

$$\{k : k = 1, 2, \ldots, n; Y_k \geq 2\}.$$

Then, which of the following statements are true?

1. $\frac{N_n}{3n}$ converges to e^{-2} with probability one.
2. N_n converges to e^{-2} in probability.
3. $\frac{N_n}{n}$ converges to $3e^{-2}$ in distribution.
4. $\frac{N_n - 3ne^{-2}}{\sqrt{3n}}$ converges in distribution to a normal random variable with mean zero and variance $e^{-2}(1 - 3e^{-2})$.

मानें कि $\{(X_k, Y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ स्वतंत्र एवं सर्वथासमानत: बंटित (i.i.d.) यादृच्छिक सदिशों का अनुक्रम है जिनका सामान्य संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{यदि } 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है। $n = 1, 2, 3, \ldots$ के लिए मानें कि N_n एक यादृच्छिक चर है जो निम्न समुच्चय में अवयवों की संख्या निरूपित करता है:

$$\{k : k = 1, 2, \ldots, n; Y_k \geq 2\}.$$

तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\frac{N_n}{3n}$ की e^{-2} को अभिसरित होने की प्रायिकता एक है।
2. N_n प्रायिकता में e^{-2} को अभिसरित है।
3. $\frac{N_n}{n}$ बंटन में $3e^{-2}$ को अभिसरित है।
4. $\frac{N_n - 3ne^{-2}}{\sqrt{3n}}$ बंटन में ऐसे प्रसामान्य यादृच्छिक चर पर अभिसारित है जिसका माध्य शून्य व विसरण $e^{-2}\left(1 - 3e^{-2}\right)$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

105 704185

Consider the Markov chain with state space $\{0, 1, 2\}$ and the transition probability matrix P given by

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $P^{(n)} = \left(\left(P_{ij}^{(n)}\right)\right)$ denote the n-step transition probability matrix. Then, which of the following statements are true?

1. $P_{00}^{(2)} = \frac{3}{4}$
2. $P_{10}^{(3)} = \frac{39}{64}$
3. The stationary probability that the chain is in state 2 is $\frac{2}{7}$.
4. State 1 is transient.

अवस्था समष्टि $\{0, 1, 2\}$ वाली ऐसी मॉर्कोव श्रृंखला लें जिसका संक्रमण प्रायिकता आव्यूह

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

है। मानें कि $P^{(n)} = \left(\left(P_{ij}^{(n)}\right)\right)$, n-पद संक्रमण प्रायिकता आव्यूह को निरूपित करता है। तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $P_{00}^{(2)} = \frac{3}{4}$
2. $P_{10}^{(3)} = \frac{39}{64}$
3. श्रृंखला के अवस्था 2 में होने की स्तब्ध प्रायिकता $\frac{2}{7}$ है।
4. अवस्था 1 क्षणिक है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

106 704186

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ be a random sample from a population with absolutely continuous cumulative distribution function $F(\cdot)$. The corresponding order statistics are $X_{1:n} < X_{2:n} < \cdots < X_{r:n} < \cdots < X_{n:n}$. For $r = 2, 3$, define, $Y_{r,n} = nF(X_{r:n})$. Suppose that $Y_{r,n}$ converges in distribution to a random variable Y_r as $n \to \infty$, $r = 2, 3$. Then, which of the following statements are true?

1. Y_2 follows gamma distribution with $E(Y_2) = 2$.
2. $E(Y_{3,n}) \to 3$ as $n \to \infty$
3. Y_3 follows beta distribution with $E(Y_3) = \frac{1}{3}$.
4. $Y_{2,n}$ follows beta distribution with parameters 2 and $n - 1$.

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ निरपेक्षत: संतत संयुक्त बंटन फलन $F(\cdot)$ वाली समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श है। संगत क्रम-प्रतिदर्शज $X_{1:n} < X_{2:n} < \cdots < X_{r:n} < \cdots < X_{n:n}$ हैं। $r = 2, 3$ के लिए $Y_{r,n} = nF(X_{r:n})$ परिभाषित करें। मानें कि $r = 2, 3$ के लिए $Y_{r,n}$ बंटन में यादृच्छिक चर Y_r को अभिसरित है, जब $n \to \infty$ हो। तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. Y_2 गामा-बंटन का अनुसरण करता है जिसके लिए $E(Y_2) = 2$ हो।
2. $E(Y_{3,n}) \to 3$ जब $n \to \infty$
3. Y_3 बीटा बंटन का अनुसरण करता है जिसके लिए $E(Y_3) = \frac{1}{3}$ हो।
4. $Y_{2,n}$ बीटा-बंटन का अनुसरण करता है, जिसके प्राचल 2 तथा $n - 1$ हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

107 704187

Let X be a random variable with probability density function

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \; x \in \mathbb{R}.$$

If $Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(X)$, then which of the following statements are true?

1. $E(Z^m) = \dfrac{1}{m+1}$, for all $m \in \mathbb{N}$
2. $E(\Phi^{-1}(Z)) = 0$, where $\Phi(\cdot)$ is the cumulative distribution function of standard normal random variable.
3. Z is degenerate at 0 .
4. If Z_1 and Z_2 are independent and identically distributed (i.i.d.) random variables having distribution same as the distribution of Z, then $Z \overset{d}{=} \dfrac{Z_1 + Z_2}{2}$.

मानें कि X यादृच्छिक चर है जिसका प्रायिकता घनत्व फलन

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},\ x \in \mathbb{R}$$

है। यदि $Z = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\tan^{-1}(X)$ है, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य है?

1. सभी $m \in \mathbb{N}$ के लिए $E(Z^m) = \frac{1}{m+1}$
2. $E\left(\Phi^{-1}(Z)\right) = 0$, जहां $\Phi(\cdot)$ मानक प्रसामान्य यादृच्छिक चर का संचयी बंटन फलन है।
3. 0 पर Z अपभ्रष्ट है।
4. यदि Z_1 तथा Z_2 स्वतंत्र एवं सर्वथासमानत: बंटित यादृच्छिक चर (i.i.d.) हैं जिनके बंटन Z के बंटन के समान हैं, तब $Z \stackrel{d}{=} \frac{Z_1 + Z_2}{2}$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

108 704188

Let Z_1 and Z_2 be two independent discrete random variables such that Z_1 follows binomial distribution with parameters $n = 2$ and $p = \frac{1}{2}$, and Z_2 follows Poisson distribution with mean 1. Consider the following system of equations with three variables x_1, x_2 and x_3:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + Z_1 x_3 &= Z_2. \end{aligned}$$

Then, the probability that the given system of equations has infinite number of solutions equals

1. e^{-1}
2. $\frac{e^{-1}}{2}$
3. $\frac{e^{-1}}{4}$
4. $\frac{e^{-1}}{12}$

मानें कि Z_1 तथा Z_2 दो स्वतंत्र असंतत यादृच्छिक चर इस प्रकार हैं कि Z_1 प्रचलों $n = 2$ तथा $p = \frac{1}{2}$ वाले द्विपद बंटन का अनुसरण करता है, तथा Z_2 माध्य 1 वाले प्वासों बंटन का अनुसरण करता है। तीन चरों $x_1,\ x_2$ तथा x_3 वाले समीकरणों के निम्न निकाय पर विचार करें:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + Z_1x_3 = Z_2.$$

तब, समीकरणों की दी गयी प्रणाली में अनंत संख्या में समाधान होने की प्रायिकता, निम्न के बराबर है

1. e^{-1}
2. $\frac{e^{-1}}{2}$
3. $\frac{e^{-1}}{4}$
4. $\frac{e^{-1}}{12}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

109 704189

Let $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ be independent and identically distributed (i.i.d.) Poisson(θ) random variables, where $\theta > 0$. Then, which of the following statements are true?

1. $(\sum_{i=1}^{8} X_i)(\sum_{i=8}^{13} X_i)$ is an unbiased estimator of $48\theta^2$.
2. $\frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} X_i$ is method of moments estimator of θ .
3. There does not exist any unbiased estimator of $e^{-7\theta}$.
4. $\left(e^{X_7}, \sum_{i=1}^{6} X_i, \sum_{i=8}^{13} X_i\right)$ is a sufficient statistic for θ.

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_{13}$ स्वतंत्र सर्वथासमानत: बंटित (i.i.d.) प्वासों(θ) यादृच्छिक चर हैं, जहां $\theta > 0$ है। तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $48\theta^2$ का $(\sum_{i=1}^{8} X_i)(\sum_{i=8}^{13} X_i)$ एक अनभिनत आकलक है।
2. θ का आघूर्ण विधि आकलक $\frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} X_i$ है।
3. $e^{-7\theta}$ का कोई अनभिनत आकलक नहीं है।
4. θ के लिए $\left(e^{X_7}, \sum_{i=1}^{6} X_i, \sum_{i=8}^{13} X_i\right)$ एक पर्याप्त प्रतिदर्शज है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

110 704190

Let X_1, X_2, X_3 be a random sample from Uniform$[0, \theta]$ distribution, $\theta > 0$. Consider the likelihood ratio test of size 0.001 for testing $H_0 : \theta = 3$ against $H_1 : \theta \neq 3$. Then, which of the following statements are true?

1. If $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ is 3.1, then H_0 is rejected.
2. If $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ is 1.3, then H_0 is rejected.
3. If $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ is 0.1, then H_0 is rejected.
4. The power of the test at $\theta = 0.3$ is 1 .

मानें कि X_1, X_2, X_3 बंटन-Uniform$[0, \theta]$ से यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जहाँ $\theta > 0$ है। $H_1 : \theta \neq 3$ के विरूद्ध परीक्षण $H_0 : \theta = 3$ के लिए आमाप 0.001 के संभाविता अनुपात परीक्षण पर विचार करें। तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. यदि $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ का मान 3.1 है, तब H_0 निराकृत है।
2. यदि $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ का मान 1.3 है, तब H_0 निराकृत है।
3. यदि $\max\{X_1, X_2, X_3\}$ का मान 0.1 है, तब H_0 निराकृत है।
4. $\theta = 0.3$ पर परीक्षण की शक्ति 1 है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

111 704191

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from an exponential distribution with probability density function

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{if } x \geq \theta \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\theta \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter. If $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, then which of the following statements are true?

1. $\left(X_{(1)} - \frac{2}{n}\ln 5,\ X_{(1)}\right)$ is a 97% confidence interval for θ.
2. $\left(X_{(1)} - \frac{2}{n}\ln 5,\ X_{(1)}\right)$ is a 96% confidence interval for θ.
3. $\left(X_{(1)} - \frac{1}{n}\ln 20,\ X_{(1)}\right)$ is a 95% confidence interval for θ.
4. $\left(X_{(1)} - \frac{1}{n}\ln 20,\ X_{(1)}\right)$ is a 96% confidence interval for θ.

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ निम्न प्रायिकता घनत्व फलन वाले चरघातांकी बंटन से यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं

$$f(x|\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{यदि } x \geq \theta \\ 0 & \text{अन्यथा,} \end{cases}$$

जहां $\theta \in \mathbb{R}$ अज्ञात प्राचल है। यदि $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. θ के लिए 97% विश्वास्यता अंतराल $\left(X_{(1)} - \frac{2}{n}\ln 5,\ X_{(1)}\right)$ है।
2. θ के लिए 96% विश्वास्यता अंतराल $\left(X_{(1)} - \frac{2}{n}\ln 5,\ X_{(1)}\right)$ है।
3. θ के लिए 95% विश्वास्यता अंतराल $\left(X_{(1)} - \frac{1}{n}\ln 20,\ X_{(1)}\right)$ है।
4. θ के लिए 96% विश्वास्यता अंतराल $\left(X_{(1)} - \frac{1}{n}\ln 20,\ X_{(1)}\right)$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

112 704192

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be a random sample of size n from $U(\theta, \theta+1)$ distribution, where $\theta \in \mathbb{R}$ is the unknown parameter. If $T_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, then which of the following statements are true?

1. T_n is an unbiased estimator of θ .
2. $\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = \theta$ for all $\theta \in \mathbb{R}$.
3. T_n is a consistent estimator of θ .
4. $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ is a consistent estimator of θ .

मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$ बंटन $U(\theta, \theta+1)$ से आमाप n का यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जहां $\theta \in \mathbb{R}$ अज्ञात प्राचल है। यदि $T_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$,, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. θ का अनभिनत आकलक T_n है।
2. सभी $\theta \in \mathbb{R}$ के लिए $\lim_{n\to\infty} E_\theta(T_n) = \theta$
3. θ का अविरोधी आकलक T_n है।
4. θ का अविरोधी आकलक $\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

113 704193

Let X_1, X_2, X_3 be a random sample of size 3 from an absolutely continuous distribution that is symmetric about 0. For $i = 1, 2, 3$, let R_i denote the rank of $|X_i|$ among $|X_1|$, $|X_2|$ and $|X_3|$. If

$$T^+ = \sum_{i=1,\, X_i>0}^{3} R_i$$

is the Willcoxon signed-rank statistic, then which of the following statements are true?

1. $P(T^+ = 3) = \frac{1}{4}$
2. $Var(T^+) = \frac{7}{2}$
3. $P(T^+ > 3) = \frac{5}{8}$
4. $P(T^+ > 4) = \frac{1}{8}$

मानें कि $X_1,\ X_2,\ X_3$ किसी निरपेक्षत: संतत फलन से आमाप 3 का यादृच्छिक प्रतिदर्श है जो कि 0 के सापेक्ष सममित है। मानें कि $i = 1,\ 2,\ 3$ के लिए, $|X_1|$, $|X_2|$ तथा $|X_3|$ के बीच $|X_i|$ की कोटि को R_i निरूपित करता है। यदि

$$T^+ = \sum_{i=1,\ X_i>0}^{3} R_i$$

विल्काक्सन चिह्नित-कोटि प्रतिदर्शज है, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $P\left(T^+ = 3\right) = \frac{1}{4}$
2. $Var(T^+) = \frac{7}{2}$
3. $P\left(T^+ > 3\right) = \frac{5}{8}$
4. $P\left(T^+ > 4\right) = \frac{1}{8}$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

114 704194

Let $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ be a random sample from $N(\theta, 1)$ distribution, where $\theta \in \mathbb{R}$ is unknown. Let δ_n be the Bayes estimator of θ, under the squared error loss function $L(\theta, a) = (a-\theta)^2,\ a, \theta \in \mathbb{R}$ and the prior distribution $N(1, 2)$. If $\frac{1}{\sqrt{n}}\left[(2n+1)\delta_n - 1 - 2n\theta\right]$ converges in distribution to a random variable Z, as $n \to \infty$, then which of the following statements are true?

1. $\delta_n \xrightarrow{P} \theta$, as $n \to \infty$, for all $\theta \in \mathbb{R}$
2. Z follows normal distribution.
3. $E(Z^4) = 48$
4. $E(Z^2) = 1$

मानें कि $X_1,\ X_2, \ldots, X_n$ बंटन $N(\theta, 1)$ से एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है, जहां $\theta \in \mathbb{R}$ अज्ञात है। मानें कि δ_n, वर्गित त्रुटि हानि फलन $L(\theta, a) = (a-\theta)^2,\ a, \theta \in \mathbb{R}$ व पूर्व बंटन $N(1, 2)$ के अधीन, θ का बेज़ आकलक है। यदि $\frac{1}{\sqrt{n}}\left[(2n+1)\delta_n - 1 - 2n\theta\right]$ बंटन में यादृच्छिक चर Z को अभिसरित है जब $n \to \infty$, तो निम्न कथनों में कौन से सत्य है ?

1. सभी $\theta \in \mathbb{R}$ के लिए $\delta_n \xrightarrow{P} \theta$ जब $n \to \infty$
2. Z प्रसामान्य बंटन का अनुसरण करता है।
3. $E(Z^4) = 48$
4. $E(Z^2) = 1$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

115 704195

Consider a linear model

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i + \epsilon_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

where errors ϵ_i's are uncorrelated with zero mean and finite variance $\sigma^2 > 0$. Let $\hat{\beta}_i$ be the best linear unbiased estimator (BLUE) of $\beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Then, which of the following statements are true?

1. The sum of squares residuals is strictly positive with probability 1 .
2. For every $\beta_i,\ 1 \leq i \leq n$, there are infinitely many linear unbiased estimators.
3. $\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2$
4. $Y_3 - Y_2$ is the BLUE of β_3 .

निम्न रैखिक मॉडल पर विचार करें

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_i + \epsilon_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

जहां त्रुटियां ϵ_i's असहसंबंधित हैं व उनका माध्य शून्य तथा विसरण $\sigma^2 > 0$ परिमित है। मानें कि $\hat{\beta}_i$ का श्रेष्ठ रैखिक अनभिनत आकलक (BLUE) $\beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ है। तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. वर्ग अवशिष्टों का योग दृढ़तः धनात्मक होने की प्रायिकता 1 है।
2. प्रत्येक $\beta_i,\ 1 \leq i \leq n$ के लिए, रैखिक अनभिनत आकलकों की संख्या अनंत हैं।
3. $\text{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2$
4. β_3 का BLUE $Y_3 - Y_2$ है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

116 704196

Consider a linear regression model $Y = X\beta + \epsilon$, with r regressors and an intercept. Random error $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ and X has full column rank. Here I_n denotes the identity matrix of order n. Regression coefficients are estimated by the least squares estimation method. Let $\hat{\sigma}^2$ and $\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}$, respectively, be the mean squares residuals and the maximum likelihood estimator of σ^2. Then, which of the following statements are true?

1. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ if $r = 2, n = 12$
2. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ if $2 \leq r \leq n-2, n \geq 12$
3. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ if $1 \leq r \leq n-2, n \geq 3$
4. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ if $r = 7, n = 12$

एक रैखिक समाश्रयण मॉडल $Y = X\beta + \epsilon$ पर विचार करें जिसके r समाश्रयी हैं तथा एक अंत:खंड हैं। यादृच्छिक त्रुटि $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ है तथा X की स्तंभ कोटि अधिकतम है। यहां कोटि n के तत्समक आव्यूह को I_n से निरूपित करते हैं। समाश्रयण गुणांकों का आकलन न्यूनतम वर्ग आकलन विधि द्वारा करते हैं। मानें कि $\hat{\sigma}^2$ तथा $\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}$ क्रमश: अवशिष्ट वर्ग माध्य तथा σ^2 का अधिकतम संभाविता आकलक है। तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $r = 2, n = 12$
2. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $2 \leq r \leq n-2, n \geq 12$
3. $\text{Var}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) < \text{Var}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $1 \leq r \leq n-2, n \geq 3$
4. $\text{MSE}(\hat{\sigma}^2_{\text{MLE}}) > \text{MSE}(\hat{\sigma}^2)$ यदि $r = 7, n = 12$

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

117 704197

Let $(X_1,\ X_2)$ be a bivariate normal random vector with $E(X_1) = 1, E(X_2) = 0, Var(X_1) = 1, Var(X_2) = 1$, and correlation coefficient $\frac{1}{2}$. Let U be a $U(0,\ 1)$ random variable, which is independent of (X_1, X_2). If $Z = \dfrac{UX_1 + X_2 - U}{\sqrt{U^2 + U + 1}}$, then which of the following statements are true?

1. The distribution of Z is symmetric about 0 .
2. $E(Z^2) = 2$
3. $Var(Z^2) = 1$
4. Z and U are independent random variables.

मानें कि किसी द्विचर प्रसामान्य यादृच्छिक सदिश (X_1, X_2) के लिये $E(X_1) = 1, E(X_2) = 0, Var(X_1) = 1, Var(X_2) = 1$ तथा सहसंबंध गुणांक $\frac{1}{2}$ है। मानें कि U एक $U(0, 1)$ यादृच्छिक चर है जो कि (X_1, X_2) से स्वतंत्र है। यदि $Z = \frac{UX_1 + X_2 - U}{\sqrt{U^2 + U + 1}}$, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. Z का बंटन 0 के सापेक्ष सममित है।
2. $E(Z^2) = 2$
3. $Var(Z^2) = 1$
4. Z तथा U स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4

Multiple Response

118 704198

Consider the following design where the columns represent blocks and the letters represent treatments:

A	C	A	B	A	B	E
B	D	C	D	D	C	F
E	E	F	F	G	G	G

Then, which of the following statements are true?

1. The design is a balanced incomplete block design.
2. The design is not connected.
3. The design is binary.
4. The design is symmetric.

निम्न डिज़ाईन पर विचार करें जहां स्तंभ, ब्लाक को प्रदर्शित करते हैं तथा अक्षर, उपचार को प्रदर्शित करते हैं

A	C	A	B	A	B	E
B	D	C	D	D	C	F
E	E	F	F	G	G	G

तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं

1. डिज़ाईन संतुलित अपूर्ण ब्लाक डिज़ाईन है।
2. डिज़ाईन संबद्ध नहीं है।
3. डिज़ाईन द्विआधारी है।
4. डिज़ाईन सममित है।

A1 :	1	
	1	
A2 :	2	
	2	
A3 :	3	
	3	
A4 :	4	
	4	

Multiple Response

119 704199

Let X_1 and X_2 be random variables having absolutely continuous distribution functions. Let $h_i(t)$ denote the hazard function of $X_i,\ i = 1, 2$. If $h_1(t) \leq h_2(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$, then which of the following statements are true?

1. $P(X_1 > 1) \geq P(X_2 > 1)$
2. $P(X_1 > 1) \leq P\left(X_2 > \frac{1}{2}\right)$
3. $E(X_1) \geq E(X_2)$ provided both the expectations exist.
4. $h(t) = h_1(t) + h_2(t),\ t \in \mathbb{R}$, is the hazard function of the random variable $Y = \min\{X_1, X_2\}$.

मानें कि X_1 तथा X_2 निरपेक्षत: संतत बंटन फलनों वाले यादृच्छिक चर हैं। मानें कि $X_i,\ i = 1, 2$ का संकट फलन $h_i(t)$ से निरूपित है। यदि सभी $t \in \mathbb{R}$ के लिए $h_1(t) \leq h_2(t)$ हो, तब निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. $P(X_1 > 1) \geq P(X_2 > 1)$
2. $P(X_1 > 1) \leq P\left(X_2 > \frac{1}{2}\right)$
3. $E(X_1) \geq E(X_2)$ बशर्ते कि दोनों प्रत्याशाओं का अस्तित्व हो।
4. $h(t) = h_1(t) + h_2(t),\ t \in \mathbb{R}$, यादृच्छिक चर $Y = \min\{X_1, X_2\}$ का संकट फलन है।

A1 :	1	
	1	
A2 :	2	
	2	
A3 :	3	
	3	
A4 :	4	
	4	

Multiple Response

120 704200

Consider maximizing the objective function

$$P = x_1 + x_2$$

subject to

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ &2x_1 - 3x_3 \geq 1 \\ &x_2 + x_3 \leq 0 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Then, which of the following statements are true?

1. The optimal solution is 4 .
2. An optimal point is $(4,\ 1,\ 0)$.
3. The optimal solution is 6 .
4. $(\frac{1}{2},\ 0,\ 0)$ is a corner point.

उद्देश्य फलन

$$P = x_1 + x_2$$

के अधिकतमिकरण पर निम्न प्रतिबंधों के अधीन विचार करें

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ &2x_1 - 3x_3 \geq 1 \\ &x_2 + x_3 \leq 0 \\ &x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

तब, निम्न कथनों में से कौन से सत्य हैं?

1. इष्टतम समाधान 4 है।
2. एक इष्टतम बिन्दु $(4,\ 1,\ 0)$ है।
3. इष्टतम समाधान 6 है।
4. $(\frac{1}{2},\ 0,\ 0)$ एक कोने का बिंदु है।

A1 : 1

1

A2 : 2

2

A3 : 3

3

A4 : 4

4